

PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA 2017

"Mengembangkan Kompetensi Strategis dan Berpikir Matematis di Abad 21"

MALANG, 8 APRIL 2017



PROGRAM STUDI S2-S3 PENDIDIKAN MATEMATIKA

ORGANIZED BY: PASCASARJANA

UNIVERSITAS NEGERI MALANG

SUPPORTED BY:



PROSIDING

SEMINAR NASIONAL PENDIDIKAN MATEMATIKA 2017

Tema: “Mengembangkan Kompetensi Strategis dan Berpikir Matematis di Abad 21”

ISBN: 978-602-61923-0-1

Tim Editor:

Prof. Gatot Muhsetyo, M.Sc.

Prof. Purwanto, Ph.D

Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si.

Dr. Abdur Rahman As'ari, M.Pd., M.A.

Tim Reviewer:

Dr. Subanji, M.Si.

Dr. I Nengah Parta, M.Si.

Dr. Hery Susanto, M.Si.

Dra. Santi Irawati, M.Si., Ph.D.

Dr. Sudirman, M.Si.

Dr. Susiswo, M.Si.

Dr. Abadyo, M.Si.

Dr. Erry Hidayanto, M.Si.

Dr. Swasono Rahardjo, M.Si.

Dr. Rustanto Rahardi, M.Si.

Dr. Tatag Yuli Eko Siswono, M.Pd.

Dr. Abdussakir, M.Pd.

Dr. Siti Inganah, M.Pd.

Penerbit:

Program Studi Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Malang

Redaksi:

Jln. Semarang No.5

Kota Malang 65145

Telp +62341551312

Email: semnasmatpasca@gmail.com

Website: www.semnasmatpascaum.com

Cetakan pertama, Juli 2017

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ke dalam bentuk apapun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk fotokopi atau merekam dengan teknik apapun, tanpa izin tertulis dari penerbit.

KATA PENGANTAR

Puji syukur senantiasa kami panjatkan kehadiran Tuhan Yang Maha Kuasa atas terselenggaranya Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2017 dengan tema “Mengembangkan Kompetensi Strategis dan Berpikir Matematis di Abad 21”. Sebagai tindak lanjut dari hasil seminar tersebut, kami selaku panitia menerbitkan prosiding seminar dari kumpulan makalah yang telah direview dan dinyatakan layak oleh para ahli di bidangnya. Penerbitan prosiding ini merupakan salah satu tuntutan agar karya yang telah dihasilkan dan diseminarkan itu memperoleh penghargaan yang optimal.

Prosiding ini memuat tiga makalah utama dan tujuh puluh dua makalah paralel. Makalah paralel tersebut terdiri dari dua kategori, yaitu makalah hasil kajian dan makalah hasil penelitian. Kategori makalah hasil penelitian terbagi ke dalam tujuh bidang, yaitu strategi pembelajaran, proses berpikir, buku ajar/teks, evaluasi, media pembelajaran, teknologi pembelajaran, dan matematika.

Reviewer makalah prosiding ini terdiri dari beberapa pakar di berbagai perguruan tinggi, yaitu: Universitas Negeri Malang, Universitas Negeri Surabaya, Universitas Muhammadiyah Malang, dan Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. *Review* oleh ahli bertujuan untuk menjamin bahwa makalah tersebut telah memenuhi standar keilmiah, terutama dari aspek isi dan metodologi.

Atas terselenggaranya seminar dan terbitnya prosiding ini kami ucapkan rasa terima kasih yang setinggi-tingginya kepada pihak-pihak berikut.

1. Rektor, Direktur Pascasarjana, Koorprodi Pendidikan Matematika Pascasarjana, Dekan FMIPA, dan Ketua Jurusan Matematika Universitas Negeri Malang.
2. Pembicara utama yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk menyampaikan ide-ide segar, gagasan progresif, serta terobosan baru dalam rangka pengembangan pendidikan dan penelitian pendidikan matematika.
3. *Reviewer* makalah dari Universitas Negeri Malang, Universitas Negeri Surabaya, Universitas Muhammadiyah Malang, dan Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Seluruh peserta seminar yang telah memberikan kepercayaan publikasi hasil pemikirannya melalui Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2017 di Pascasarjana Universitas Negeri Malang.
5. Dosen dan mahasiswa panitia dari Prodi S2/S3 Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Malang yang telah bekerja keras mensukseskan Seminar Nasional Pendidikan Matematika 2017 dan membantu penerbitan prosiding ini.

Semoga prosiding ini dapat memberikan manfaat dan inspirasi bagi para pembaca, khususnya para pendidik, mahasiswa, dan pemerhati pendidikan matematika dalam meningkatkan prestasi dan profesionalitasnya.

Malang, Juli 2017

Panitia

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	ii
DAFTAR ISI	iii
 MAKALAH UTAMA (PLENO)	
Building A 21 st Century Mathematical Brain <i>Allan Leslie White, University of Western Sydney</i>	1
Matematika: Penalaran dengan Cinta <i>A.N.M. Salman, Institut Teknologi Bandung</i>	11
Berpikir Matematis dalam Mengonstruksi Konsep Matematika: Sebuah Analisis Secara Teoritis dan Praktis <i>Subanji, Universitas Negeri Malang</i>	20
 BUKU AJAR/TEKS	
Pengembangan Bahan Ajar Materi KPK dan FPB Berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR) Berbantuan <i>Puzzle</i> <i>Pipit Pudji Astutik</i>	30
 EVALUASI	
Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Berdasarkan Tahapan Newman dan <i>Scaffolding-nya</i> <i>Alifiani</i>	47
Analisis Kesalahan Siswa Bergaya Belajar Visual, Auditori, dan Kinestetik dalam Menyelesaikan Masalah Aljabar Ditinjau dari Struktur Berpikirnya <i>Kinanti Retnaning Widyani, Subanji, & Purwanto</i>	58
Analisis Kesalahan Siswa Bergaya Kognitif Field-Dependent dan Field-Independent Dilihat dari Struktur Berpikir dalam Menyelesaikan Soal Cerita <i>Alif Nadia Makhrubi, Subanji, & Abadyo</i>	69
Analisis Kesalahan Siswa dalam Melakukan Translasi Representasi Materi SPLDV dan <i>Scaffoldingnya</i> <i>Feny Eka Nuryanti, Sisworo, & Dwiwana</i>	84
Analisis Kemampuan Siswa dalam Pemecahan Masalah pada Soal Cerita Materi Bangun Ruang Sisi Datar <i>Jasmi Nelda Fitri Yanti, Gatot Muhsetyo, & Dwiwana</i>	96
Analisis Kesalahan Siswa SMP dalam Menyelesaikan Masalah Matematika PISA pada Tahapan Penyelesaian Masalah Blum-Leiss <i>Vivi Rachmatul Hidayati, Subanji, & Sisworo</i>	108

Analisis Kesalahan Siswa SMP Kelas VIII dalam Menyelesaikan Masalah Matematika PISA <i>Zella Novita, Ipung Yuwono, & Abadyo</i>	120
Asesmen Kinerja pada Pembelajaran Lingkaran Kelas VIII SMP Kristen Baithani Tosari <i>Celvia Rince Christiasari, Cholis Sa'dijah, & Swasono Rahardjo</i>	133
Identifikasi Kesalahan Peserta Didik Kelas VIII dalam Memecahkan Masalah Lingkaran <i>Aris Mustofa, Sudirman, & Makbul Muksar</i>	144
Identifikasi Kesalahan Siswa SMP Terhadap Soal Cerita Lingkaran <i>Wahyuni & Santi Irawati</i>	153
Identifikasi Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Tentang Limit <i>Ria Amalia & Eric Dwi Putra</i>	163
Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Trigonometri <i>Yayuk Kuswanti, Sudirman, & Toto Nusantara</i>	171
Kemampuan Berpikir Kritis Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Persamaan Garis Berbantuan Geogebra <i>Mohamad Aminudin & I Nengah Parta</i>	180
Kemampuan Representasi Matematis Siswa Kelas X MAN Tambakberas Jombang dalam Menyelesaikan Masalah Trigonometri <i>Sufinda Aliyahrini, Sudirman, & Abd. Qohar</i>	189
Penilaian Berbasis Kelas dalam Pembelajaran Matematika di SMA <i>Rr. Kuntie Sulistyowaty</i>	201
Penilaian Pembelajaran Matematika: Prinsip, Kompetensi Matematika, dan Metode <i>Ma'ruf Rivaldi</i>	210
Penilaian Portofolio untuk Mengurangi Kecemasan Matematika Peserta Didik <i>Rayinda Aseti Prafianti</i>	217
Profil Pengajuan Masalah Matematika Siswa SMA Pada Materi Matriks <i>Hendrika Bete, I. Nengah Parta, & Tjang Daniel Chandra</i>	225
Representasi Matematis Siswa SMP dalam Menyelesaikan Pemecahan Masalah Matematika Materi Perbandingan <i>Claudya Zahrani Susilo, Susiswo, & Swasono Rahardjo</i>	238
Tinjauan Faktor Yang Mempengaruhi Kecepatan Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Nilza Humaira Salsabila & Ressay Rustanuarsi</i>	249

MATEMATIKA

Algoritma M-ABC Untuk Menyelesaikan Optimasi Portofolio dengan Kendala Cardinality
Jamaliatul Badriyah, Trianingsih Eni L., Dahliatul Hasanah, & Nur Atikah256

Identifikasi Autokorelasi Spasial pada Kasus Seluruh Tuberkulosis di Kota Yogyakarta Tahun 2015 dengan Menggunakan Indeks Moran
Rahmy & Jaka Nugraha263

Karakterisasi Gelanggang Nil Bersih Lemah yang Tereduksi
Muhammad Ajrul Mahbub & Hery Susanto272

Penerapan Regresi Robust dengan Estimasi M dalam Pemodelan Produksi Padi di Indonesia Tahun 2015
Purnami Yuli Sasmiati & Edy Widodo284

MEDIA PEMBELAJARAN

Media Pembelajaran Materi Fungsi SMP Kelas VIII Berbasis *Intelligent Tutoring System*
Yuni Rosita Dewi, Mohamad Yasin, & Rini Nurhakiki293

Pengembangan Alat Hitung Trigonometri Tipe Synchronous Multimedia untuk Meningkatkan Motivasi Belajar Peserta Didik
Ratna Yulis Tyaningsih & Samijo307

Pengembangan Evaluasi Pembelajaran Berbentuk Game pada Materi Relasi dan Fungsi untuk Siswa SMP
Cindy Indra Amirul Fiqri322

PROSES BERPIKIR

Aktivitas Metakognitif dalam Memecahkan Masalah Geometri pada Siswa Sekolah Menengah Pertama
Suci Zuriati, Cholis Sa'dijah, & Sisworo331

Analisis Kemampuan Berpikir Kreatif Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal Open Ended Bangun Ruang Sisi Datar
Dewi Nur Rahmasari, Ipung Yuwono, & Gatot Muhsetyo343

Analisis Proses Berpikir Siswa Kelas XII dalam Generalisasi Masalah Pola Bilangan Berdasarkan Gender
Nurita Primasatya352

Analisis Representasi Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Terkait Trigonometri
Rossi Setya Fatmasari, Edy Bambang Irawan, & Gatot Muhsetyo362

Berpikir Kreatif Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Open-Ended Tentang Operasi Bilangan Bulat
Tomy Syafrudin, I Nengah Parta, & Makbul Muksar373

Empat Langkah Polya dalam Memecahkan Masalah Ditinjau dari Proses Asimilasi <i>Budi Mardikawati</i>	383
Hambatan Kognitif Mahasiswa dalam Mengonstruksi Bukti pada Materi Geometri <i>Euclid Isbadar Nursit</i>	392
Identifikasi Kemampuan Representasi Matematis Sistem Persamaan Linear Dua Variabel <i>Nurul Ma'rifah, Akbar Sutawidjaja, & I Made Sulandra</i>	406
Identifikasi Representasi Skematis Dalam Menyelesaikan Masalah Matematika <i>Rahmad Bustanul Anwar, Ipung Yuwono, Abdur Rahman As'ari, Sisworo, & Dwi Rahmawati</i>	417
Indikasi Berpikir Intuitif dalam Memecahkan Masalah Kekonvergenan Barisan <i>Nurhanurawati, Purwanto, Abdur Rahman As'ari, & Edy Bambang Irawan</i>	426
Kemampuan Analisis dan Evaluasi Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika <i>Mohammad Emsa Arifin, I Nengah Parta, & Hery Susanto</i>	433
Kemampuan Literasi Matematik Orang Dewasa yang Tidak Mengenyam Pendidikan Formal <i>Fajri Maulana & Lusy Setiyowati</i>	442
Kemampuan Penalaran Matematis Siswa SMK Dalam Menyelesaikan Soal Cerita Barisan dan Deret <i>Makmun Solehudin, Ipung Yuwono, & Hery Susanto</i>	451
Pemahaman Instrumental dan Pemahaman Relasional dalam Pembelajaran Matematika <i>Sri Andriani & Yelni Putri Ningsih</i>	460
Pemahaman Siswa Tentang <i>Equal Sign</i> dalam Mengerjakan Soal Matematika di Kelas VII <i>R. Azmil Musthafa, Erry Hidayanto, & Abadyo</i>	471
Penalaran Analogi Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Masithoh Yessi Rochayati, Subanji, & Akbar Sutawidjaja</i>	478
Profil Pemahaman Konsep Pertidaksamaan Nilai Mutlak pada Siswa Kelas X SMA Muhammadiyah 1 Ponorogo Berdasarkan Teori APOS (<i>ACTION, PROCESS, OBJECT, SCHEMA</i>) <i>Sugeng Riadi, Imam Sujadi, & Riyadi</i>	485
Proses Berpikir Konseptual Mahasiswa Laki-laki Kemampuan Matematika Tinggi dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Hamda</i>	494
Proses Berpikir Kreatif Siswa dalam Menyelesaikan Soal <i>Open-Ended</i> <i>Nisak Nirmala Rosy, I Nengah Parta, & Swasono Rahardjo</i>	506

Proses Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan <i>Ill Sturctured Problems</i> Matematis <i>Abdillah, Toto Nusantara, Subanji, & Hery Susanto</i>	517
Proses Koneksi Matematis Siswa <i>Slow Accurate</i> dalam Menyelesaikan Masalah Program Linear <i>Nourma Pramestie Wulandari, Sri Mulyati, & DwiYana</i>	528
Representasi Matematis dalam Menyelesaikan Masalah Program Linier di Kelas XI IPA 1 SMA Sejahtera Prigen <i>Indawati, Subanji, & DwiYana</i>	537
Representasi Siswa dalam Pemecahan Masalah Aplikasi Luas Daerah Bidang Datar <i>Dewi Sufia Hapsah,</i>	546
Sistem Metakognitif Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Ditinjau dari Taksonomi Marzano <i>Nita Fatma Fauziah, Purwanto, & Sudirman</i>	554
Sistem Representasi Internal Siswa dalam Membangun Konsepsi Bilangan Bulat Negatif <i>Anita Dewi Utami & I Nengah Parta</i>	565
STRATEGI PEMBELAJARAN	
Efektivitas Modul Matematika untuk Pembelajaran Dengan Pendekatan Konstruktivistik Di SMPN 1 Sempu <i>Diyah Ayu Rizki Pradita, Ria Amalia, & Lutfiyah</i>	574
Kajian Tentang Ketertarikan Siswa terhadap Penggunaan Dongeng untuk Meningkatkan Respon Siswa dalam Belajar Operasi Bilangan Cacah <i>Ambar Setiyoko, Gatot Muhsetyo, & Swasono Rahardjo</i>	583
Modifikasi Pembelajaran Berbasis Proyek dengan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>Group Investigation</i> Menjadi Model Pembelajaran Penugasan Proyek Bertingkat <i>Indah Rahayu Panglipur</i>	592
Peningkatan Hasil Belajar Matematika Melalui Model Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>STAD (Student Teams Achievement Divisions)</i> <i>Siska Pratiwi & Farid Suhermanto</i>	601
Pembelajaran Berbasis Proyek untuk Membangun Berpikir Reflektif Mahasiswa dalam Menyusun Usulan Penelitian Pendidikan Matematika <i>I Nengah Parta, Sri Mulyati, Rini Nurhakiki, & Latifa Mustofa L</i>	609
Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>Think-Pair-Share</i> untuk Meningkatkan Kemampuan Memecahkan Masalah dan Hasil Belajar Materi Integral pada Mahasiswa Teknik Informatika Universitas Kanjuruhan Malang <i>Abdullah Ash Shiddieqy, Sri Mulyati, & Purwanto</i>	624
Pembelajaran Limit Berbantuan <i>Link Map</i> pada Siswa Kelas XI-3 SMA Brawijaya <i>Smart School</i> Malang <i>Pungky Rahmawati</i>	637

Pendekatan <i>Concrete Pictorial Abstract</i> (CPA) untuk Memfasilitasi Pemahaman Konsep Siswa <i>Zul Jalali Wal Ikram, Rahma Nasir, & Raisatul Fadliyah J</i>	652
Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) dalam Penggunaannya untuk Meningkatkan Kemampuan Literasi Matematika Siswa <i>Oktaviana Sinaga</i>	661
Penerapan Pembelajaran dengan Pendekatan Open Ended untuk Meningkatkan Berfikir Kreatif Matematika <i>Sul'an</i>	669
Penerapan Pembelajaran Inkuiri Terbimbing yang Dapat Meningkatkan Kemampuan Siswa Menggunakan Representasi Eksternal Beragam dalam Menyelesaikan Masalah Program Linear Pada Kelas XI <i>Rina Ramadani & Eddy Budiono</i>	679
Pengaruh Penerapan Model <i>Advance Organizer</i> Terhadap Minat Belajar Segiempat Siswa Kelas V SD <i>Dwi Noviani Sulisawati & Frida Murtinasari</i>	689
Pengembangan LKS dengan Pendekatan Open Ended pada Materi Bangun Ruang Sisi Datar untuk Kelas VII SMP <i>Tamyis Suliantoro</i>	698
Strategi Heuristik dalam Pemecahan Masalah Matematis Siswa SMP pada Materi Lingkaran <i>Yunita Herdiana</i>	708
Upaya Meningkatkan Motivasi Belajar Matematika Siswa Kelas VII D SMPN 2 Mlati dengan Pembelajaran Kooperatif <i>Student Team Achievement Division</i> (STAD) <i>Fitria Mardika</i>	719
Upaya Meningkatkan <i>Self Efficacy</i> Siswa Kelas X IPS 3 MAN Yogyakarta II dalam Pembelajaran Matematika dengan Menggunakan Model <i>Inquiry Learning</i> <i>Maulina Asnal, Sity Rahmy Maulidya, & Rusi Ulfa Hasanah</i>	729
TEKNOLOGI PEMBELAJARAN	
Konstruksi Materi Konsep Integral Tentu dengan Software Geogebra (Suatu Kajian Penggunaan Geogebra dalam Pembelajaran Kalkulus) <i>Widiya Astuti Alam Sur</i>	737
Karakteristik <i>Rich Tasks Mathematics</i> yang Dikembangkan oleh Guru <i>Ajeng Gelora Mastuti, Abdur Rahman As'ari, Purwanto, & Abadyo</i>	754
Pengembangan Komponen Model Pembelajaran Pada Model Pembelajaran Asesmen Sejawat <i>Hendro Permadi, Ipung Yuwono, I Nengah Parta, & Sisworo</i>	767

BUILDING A 21ST CENTURY MATHEMATICAL BRAIN

Allan Leslie White
SEAQiM Yogyakarta

Abstract: Since 1924 the developments in technology have allowed direct observation of our brain and now brain research is being used to treat autism spectrum disorders, Alzheimer's disease, Parkinson's disease and other brain related conditions. As research expands our knowledge of the brain there are important implications for education and educational theory. Many theories were based on data gained by using strategies of classroom observation, student and teacher interviews and self-reports and each of these collection methods have limitations. Brain research offers data of a different type that can either support or oppose the existing theories. This paper will discuss some of these implications with special focus upon the importance of understanding in the mathematics teaching and learning process, and provide a scale to assess teaching strategies based on their outcomes

Key Words: School Mathematics, Insight, Instrumental Understanding, Rote Memorization, Relational Understanding, Scaffolding, Mindsets, Finger Perception, Neuroplasticity, Long-Term Memory, Elaborated Rehearsal, Compression, Distributed Practice, Unconscious Brain, East Asian Repetitive Learning.

INTRODUCTION

Communication in the classroom between teacher and students involves the use of representations. These representations can take many forms involving a mix of spoken language, written symbols (numbers, algebra, etc.), pictures (photos, graphs, etc.), video, dynamic images or physical objects. From a cognitive science viewpoint, students receive this representation and their thinking produces an internal representation. How to measure how closely the student's representation matches the teacher's representation is a challenge.

There was no problem for early Behaviourists (see Skinner, 1953) as they rejected the idea of internal representations because they could not be observed. For other groups, such as Constructivists, there were various strategies used for making inferences about the quality of these internal representations (or constructions). Some of these strategies involved getting the students to talk about their thinking. Others involved students writing their solutions on the board and to use a 'think aloud' strategy where they were expected to verbalise their thinking for the class. Teachers were expected to analyse the quality of the thinking. One obvious problem is that the students are often unable to articulate their thinking. While there are many other strategies none have actually involved observing what happens in the brains of the students when they are thinking.

We all have systems of concepts that we use in thinking, but we cannot consciously inspect our conceptual inventory. We all draw conclusions instantly in conversation, but we cannot consciously look at each inference and our own inference-drawing mechanisms while we are in the act of inferring on a massive scale second by second. We all speak in a language that has a grammar, but we do not consciously put sentences together word by word, checking consciously that we are following the grammatical rules of our language. To us, it seems easy: We just talk, and listen, and draw inferences without effort. But what goes on in our minds behind the scenes is enormously complex and largely unavailable to us (Lakoff & Nunez, 2000, p.27).

In 1924, Hans Berger recorded the first human electroencephalogram (EEG). Since then, there have been significant developments in technology, and now there are a

variety of approaches for examining brain activity such as Magnetic resonance imaging (MRI), nuclear magnetic resonance imaging (NMRI), magnetic resonance tomography (MRT) and computed tomography (CT scans). These and other technologies are giving researchers access to new knowledge that has impacted upon medicine and is being used to treat autism spectrum disorders, Alzheimer's disease, Parkinson's disease and other brain related conditions. Importantly for this paper, the implications of brain research for mathematics education are beginning to emerge. Brain research provides a fresh perspective on the teaching and learning of mathematics. In the following sections I will attempt to briefly present a small sample of the findings that have relevance for mathematics education in the twenty-first century with a special focus upon school mathematics teaching and learning

Learning and Understanding

A key concept from brain research has been termed 'brain plasticity' or 'neuroplasticity', which refers to the ability of the brain to change. All behaviour influences and alters the brain and it is possible at any age to grow the brain. An example is your dominant hand motor region in the brain which is larger than the other side, thus right handed people have a larger brain region on their left side and vice versa. If you lose your dominant hand then slowly the other hand will become more dominant as the opposite side of the brain grows while the part of the brain allocated to the lost limb will fade.

Research has shown that the brain can reorganise itself in remarkable ways as a result of a change in stimuli. It can do this in three main ways: chemical, structural and .altering its function. These ways are not mutually exclusive and the processes interact with each other. As a region of the brain is used more often it becomes more excitable (chemical) and easier to use again through the formation of networks (structural). As this happens the brain shifts how and when these regions are activated (functional).

When students work mathematically their brain activity is distributed between different networks which include two visual pathways: the ventral and dorsal visual pathways. Neuroimaging has shown that when students work on a number calculation, such as 11×27 , with symbolic digits (11 and 27) their mathematical thinking uses visual pathways. So these visual regions are multifunctional. Thus whole networks of neurons are shifting and changing. As patterns of neuroplasticity are linked to behaviour they are highly diverse and variable between individuals and there are limitations to neuroplasticity as is evidenced by the terrible effects for people who have had a stroke and the difficulty of the recovery processes. It is now time to consider the implications of neuroplasticity for learning.

The process of learning begins when neurons are chemically excited and form networks that fire together. The more an individual uses the networks the more developed they become until eventually they become automatic as a result of compression (discussed later in this paper). Conversely, through less use the networks decay and eventually become lost. It is essentially a process of rewiring the brain by forming or strengthening new connections and allowing old connections to decay. Brain researchers have shown that:

Children are not always stuck with mental abilities they are born with; that the damaged brain can often reorganise itself so that when one part fails, another can often substitute; ... One of these scientists even showed that thinking, learning, and acting can turn our genes on and off, thus shaping our brain anatomy and our behaviour (Doidge, 2008, p. xv).

The implications for mathematics education, and especially school mathematics are profound. It opposes the traditional beliefs that some children are born with the ability to do mathematics, others are not.

... scientists now know that any brain differences present at birth are eclipsed by the learning experiences we have from birth onward (Boaler, 2016, p. 5).

Brain research goes against commonly held beliefs, by claiming that children are not born knowing mathematics, instead they are born with the potential to learn mathematics. How this potential is nurtured, encouraged, and challenged is the responsibility of parents and teachers. Importantly human minds are 'plug-and-play devices' and are not designed to be used alone (MacKay, 2013). They are designed to be used in networks to develop collective intelligence. This raises issues around the use of electronic games in education and whether they can allow us to measure learning in different ways.

If the child learns a concept deeply, then the synaptic activity creates lasting connections in the child's brain, whereas surface learning quickly decays. Sousa (2008) stated that scientists currently believe there are two types of temporary memory. Firstly, immediate memory is the place where the brain stores information briefly until the learner decides what to do with it. Information remains here for about 30 seconds after which it is lost from the memory as unimportant. Secondly, the working memory is the place where the brain stores information for a limited time of 10 to 20 minutes usually but sometimes longer as it is being processed. The transfer from immediate memory to working memory occurs when the learner makes a judgement that the information makes sense or is relevant. If the information either makes sense or is relevant then it is likely to be transferred to the working memory. This is the result of the brain increasing the concentration of chemical to certain neurons that result in short term change.

If the aim is to achieve long term change then more time is needed. Crucially for teachers, if the newly learned concept has both relevance and meaning then it is almost certain to be transferred to the long-term memory. This involves a structural change of the brain and this process includes the integration and expansion of neural networks. Many teachers have experienced student's being proficient with a mathematical procedure one day and having forgotten it the very next day. This is a case of chemical activity failing to cause structural change which requires greater time for it to happen.

Relevance and how students make this judgement involves the area of attitudes and beliefs about their own intelligence and ability to learn. Mathematics teachers are expected to teach the curriculum while developing positive attitudes towards mathematics and by engaging and motivating their students to work mathematically. Psychologist Barbara Dweck (2006) and her research team collected data over a number of years and concluded that everyone held a core belief about their learning and their brain. There was a distinction between what they labelled as a fixed mindset and a growth mindset. A student with a fixed mindset believes that while they can learn things, they cannot change

their intelligence level. Whereas a student with a growth mindset believes that the brain can be changed through hard work and the more s/he struggles the smarter s/he becomes. There is an obvious connection here between growth mindset and brain plasticity. Professor Jo Boaler (2016a) in her latest book provides a large set of research evidence involving mathematics learning to support Dweck's work.

It turns out that even believing you are smart - one of the fixed mindset messages - is damaging, as students with this fixed mindset are less willing to try more challenging work or subjects because they are afraid of slipping up and no longer being seen as smart. Students with a growth mindset take on hard work, and they view mistakes as a challenge and motivation to do more (Boaler, 2016, p. 7)

Boaler and her team have developed a website (Youcubed), and have produced many short videos (search for Jo Boaler on Youtube for a selection), and published considerable material on how to promote growth mindsets in the classroom.

Briefly I will refer to another surprising result from neuro research that Boaler has highlighted and that is the importance of the link between finger awareness and early mathematics learning. Berteletti and Booth (2015) studied a specific region of the brain linked to perception and representation of fingers known as the somatosensory finger area. Brain researchers state that we "see" a representation of our fingers in our brains, even when we do not use fingers in a calculation. When 8-to-13-year-olds were given complex subtraction problems, the somatosensory finger area lit up, even though the students did not use their fingers. So the brain makes multiple use of this region. Perhaps the multifunctional brain explains: "The need for and importance of finger perception could even be the reason that pianists, and other musicians, often display higher mathematical understanding than people who don't learn a musical instrument" (Boaler, 2016b). Other neuroscientists are researching why finger knowledge predicts mathematics achievement, and agree that it is critical for young students to develop their finger perception (Penner-Wilger, Fast, LaFevre, Smith-Chant, Skwarchuck, Kamawar, et al., 2007). This opposes advice given to some teachers who are told to stop young children using their fingers in class.

My aim for the rest of this paper is not to replicate or continue to summarise Boaler's material, as the reader can get access through the links I have provided. Instead I will continue to consider the implications of the *Scale for Teaching for Understanding* and current brain research for school mathematics teaching and learning. In the following section I will provide a brief overview of the scale before elaborating upon mathematical insight and concluding with the importance of challenge.

A Scale for Teaching for Understanding

A classroom teacher has a vast array of teaching strategies for teaching mathematics and some produce negative effects such as those arising from behaviourism, rote memorisation and skills based teaching strategies which have been discussed elsewhere in some detail (White, 2011, 2013). These are a few of the many strategies regarded as ineffective or even harmful to the development of mathematical understanding. Why is understanding or meaning so important? Meaning determines the possibility that information will be learned and retained in the long term memory, the goal of all mathematics teaching and learning. Making sense or meaning is a crucial

consideration of the learner in moving information to both the working and long term memory.

Students may diligently follow the teacher's instructions to memorize facts or perform a sequence of tasks repeatedly, and may even get the correct answers. But if they have not found meaning by the end of the learning episode, there is little likelihood of long-term storage (Sousa, 2008, p. 56).

Making sense, meaning or understanding does not have a single end point but refers to a process of an increasing accumulation of inputs and connections. The foundation of the scale (see Figure 1) relies upon the classification of mathematical understanding by Skemp (1976, 1977, 1979, 1986, 1989, 1992). Instrumental understanding he described as learning 'rules without reasons' or 'knowing how' and for many students and sometimes their teachers the possession of such rules and the ability to use them with textbook and examination questions was regarded as a demonstration of their 'understanding'. Why a rule worked was not considered and there was little effort to help the students to construct meaning or a deeper understanding. Instrumental understanding is often associated with surface learning. This instrumental approach, according to Skemp (1976, 1986), is initially easier to understand with more immediate and apparent rewards, and students who become accustomed to this approach resist alternative teaching strategies. A predominant feature of this approach to teaching is repetitive drill, practice and memorising with little or no attempt to assist students to construct meaning.

In contrast relational understanding is concerned primarily with meaning and developing connected understanding and is often associated with deep or connected knowledge. Relational understanding is 'knowing both what to do and why.' Skemp (1976, 1977) discussed the development of schemas as evidence of the construction of relational understanding and this resonates very strongly with the structure of the networks and connections within the brain. There is a relationship between relational understanding and long term retention.

There have been many attempts to direct mathematics teaching strategies towards each or either type of understanding has been a concern to educational researchers. In some cases by emphasising the importance of relational understanding the result has been that instrumental understanding was seen in a bad light or to be totally avoided. Sfard (2000) was not convinced of this and decided to investigate,

I decided there is a room to reconsider the idea of instrumental understanding and to ask ourselves whether our tendency to view it as a rather undesirable phenomenon is fully justified (p. 94).

She commented that it appeared that everyone tended to learn mathematics initially at an instrumental level accompanied with drill and doubts, where "even professional mathematicians cannot escape this fate" (Sfard, 1991, p. 32). This resonated with Skemp's (1976) earlier comments that "even relational mathematicians often use instrumental thinking", and it "is a point of much theoretical interest" (p. 8). Brain research has helped to understand the interplay of the instrumental and relational aspects of understanding by pointing to what is often termed compression which is also sometimes confused with rote.

Mathematics is amazingly compressible:-you may struggle a long time, step by step, to work through the same process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. (Thurston, 1990, p. 847).

The scale below attempts to illustrate the interplay of these forms of understanding in the quest for teaching strategies that produced students who develop sufficient meaning to move their learning to the long term memory and produce the compression and hopefully insights in the process.

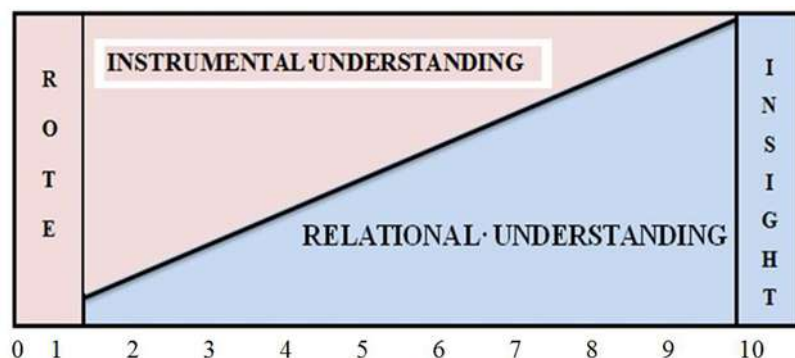


Figure 1. Teaching for Understanding

The scale of teaching for understanding was presented as a continuum (see Figure 1) based on the assumptions that all teaching strategies can be classified according to their aims and outcomes using Skemp's types of understanding, and that the struggle to assist learners to understand is the struggle to make sense or meaning (White, 2013, 2014).

The left end of the scale (score 0) rote memorization is the most extreme end of instrumental teaching strategies where there is no attempt to assist students to understand or connect what they are memorizing with prior knowledge. For example, small children memorise the alphabet by rote and it is much later they learn how to use this alphabet to make meaning. Some early childhood centres use a rote count strategy regularly throughout a day with variations of quickly/slowly; loudly/softly; steadily or in a stop/start fashion, and in isolation or with accompanying body movements.

The term 'rote' is the source of considerable 'heat' and conflicting meanings. I find it difficult to associate it with learning as it is just memorisation. However Sousa (2008) contrasts two kinds of practice as rote and elaborative rehearsal regarding their effects upon the brain. Rote rehearsal is a process of learning information in a fixed way without meaning and is easily forgotten. Elaborative rehearsal encourages learners to form links between new and prior learning, to detect patterns and relationships and construct meaning. The construction of meaning involves the building of cognitive schemas that will assist retention in the long term memory. Of course there are a range of elaborative rehearsal teaching strategies that differ in success.

There are some mathematics teaching strategies that could be given a score of one on this scale as they are predominantly instrumental in their student learning outcomes. For example, Cobb and Jackson (2011) found that many teachers 'proceduralise' problems when they launch them thus removing the problem solving objective and

converting the problems to exercises in applying a procedure. The results of this type of teaching are negative. Ellerton and Olson (2005) examined one result and called it the assessment dilemma: Where students are rewarded for giving correct answers with no understanding by just following a memorised procedure, while incorrect answers are given a zero mark although they show some understanding of the underlying mathematical concepts. Earlier Brousseau (1984) in his work on didactical contracts identified an approach where the teacher reduced a student's role by 'emptying' the task of much of its cognitive challenge. This should not be confused with the practice of 'scaffolding' which seeks to assist the student to meet the challenge not reduce it. This issue has serious implications for differentiated learning; what is scaffolding for one student may act as cognitive emptying for another.

Scores of 1 to 9 indicate the majority of teaching strategies are a combination of instrumental, relational, memory strategies and elaborative rehearsal that are all important in the process of building more sophisticated concepts that are meaningful to the learner. When we consider the time allocated to practice or rehearse then there is another distinction made in the literature between *massed practice* and *distributed practice* (Sousa, 2008). Cramming before an examination is an example of massed practice where material is crammed into the working memory, quickly forgotten without further sustained practice as there is no sense making and never makes it into the long term memory. Distributed practice on the other hand is sustained practice over time. A process of building understanding and resulting in long-term storage.

Distributive practice resonates very strongly with East Asian Repetitive Learning, often misunderstood as a form of rote, but is continuous practice with increasing variation. Leung (2014) sought to clear up this misconception by making a clear distinction between memorization and rote which is a strategy for memorization.

Memorization may have a negative connotation for some Western educators, who see it as a sign of rote learning. But for East Asians, practice and memorization do not necessarily imply rote learning or rule out creativity. ... The Chinese believe in skill development first, which typically involves repetitive, as opposed to rote learning after which there is something to be creative with. In East Asia, practice and memorization are considered legitimate (and probably effective) means for understanding and learning, and equating memorization without full understanding to rote learning may be too simplistic a view. (Leung, 2014, p. 600).

Leung' statement identifies a process called repetitive learning that may begin with the instrumental learning and gradually build to relational understanding by increasing the degree of variation and challenge through increasing the complexity and the connections with prior knowledge. So in terms of the model East Asian Repetitive Learning is a movement from a score 1 to a score 9.

The right endpoint of the scale of teaching for understanding has a score of 10 and refers to the development of insights as a student learning outcome.

By insight, then, is meant **not** any act of attention or advertence or memory but the supervening act of understanding (Lonergan, in Crowe & Doran, 1957, p. ix)

For others it is the result of longitudinal constructed meaning that leads to compression and possibly the generation of insight.

Mathematics is amazingly compressible ... The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics (Thurston, 1990, p. 847).

Insight was apparently derived from a Dutch word for 'seeing inside' and is loosely defined within the mind of a learner when exposed to new information as a process that enables the learner to grasp the core or essential features of a known problem or phenomena. An insight seems to result in a more efficient connective process within the brain or a quick restructuring that produces new understanding that is a compression of the connected information. Encouraging student insight is a goal in the process of teaching for mathematics understanding.

Researchers draw strong connections between insight, creativity and exceptional abilities, with exceptional intellectual accomplishment almost always involving intellectual insights (Sternberg, 1985). Insights can occur as a result of the work of the conscious and unconscious mind. The unconscious mind can continue to operate when the conscious mind is otherwise distracted, hence the large number of cases of mathematics students claiming to have gone to bed with an unsolved mathematics problem only to wake the next morning with an insight into the solution.

Perhaps the most fundamental, and initially the most startling, result in cognitive science is that most of our thought is unconscious that is, fundamentally inaccessible to our direct, conscious introspection. Most everyday thinking occurs too fast and at too low a level in the mind to be thus accessible. Most cognition happens backstage. That includes mathematical cognition (Lakoff & Nunez, 2000, p.27).

An insight is not an end in itself but can contribute to further understanding and further insights. It is the accumulation of insights that leads to the desired compression of mathematical understanding. This compression provides the mathematical tools to efficiently tackle more sophisticated and complicated mathematical problems.

In the brief discussion above, the importance of student construction of meaning has been presented in the light of the emerging brain research. I would like to conclude this brief paper with a discussion of the implications of this discussion above upon a part of a mathematics lesson that is often ignored or left unplanned, and that is the lesson closure. The end of the mathematics lesson.

The Importance of Challenge and Struggle

While making mathematics learning joyful and fun, brain research has revealed that we should not remove struggle and challenge. The brain grows through concentration and challenge. Research shows that when students struggle and make mistakes, synapses fire and the brain grows (Boaler, 2015). This also has implications for what is known as instructional scaffolding. Scaffolding should be a learning process designed to promote a deeper level of learning such as described in the model of East Asian Repetitive Learning. Scaffolding first introduced in the late 1950s by Jerome Bruner should be the support given during the learning process which is tailored to the needs of the student with the intention of helping the student achieve certain learning goals. Scaffolding should help the student not by removing the challenge and the struggle of learning from mistakes but in encouraging the student to face and overcome challenges through struggle. Brain research has revealed the importance of learning from mistakes rather than preventing them,

Educators have long known that students who experience 'cognitive conflict' learn deeply and that struggling with a new idea or concept is very productive for learning (Piaget, 1970). But recent research on the brain has produced what I believe to be a stunning new result. Moser and colleagues (2007) showed that when students make mistakes in mathematics, brain activity happens that does not happen when students get work correct. For people with a growth mindset the act of making a mistake results in particularly significant brain growth. (Boaler, 2014, p.17)

The amount of scaffolding given by the teacher varies with each individual student, and should avoid cognitive emptying where a teacher provides so much scaffolding that it empties a task of its cognitive challenge and the student answers just a series of relatively simple questions (Brousseau, 1984).

CONCLUSION

This paper has briefly discussed some of the findings that brain research is providing to the teaching and learning of mathematics. It seeks to motivate mathematics educators encourage their students to accept challenge, to build their mathematical understanding, to develop links and connections within their knowledge, and to develop positive attitudes towards their mathematical learning and knowledge. The paper also briefly highlights the complexity faced by current mathematics teachers who are expected to remain at the forefront of change. It is why I regards all enthusiastic mathematics educators as super heroes (White, 2011).

REFERENCES

- Berteletti, I., & Booth, J. R. (2015). Perceiving fingers in single-digit arithmetic problems. *Frontiers in Psychology*, 6, 226.
- Boaler, J. (2014). Unlocking children's mathematics potential: five research results to transform mathematics learning. *Reflections*, 39(2), 16-20.
- Boaler, J. (2015: Revised edition). *What's math got to do with it? How teachers and students can transform mathematics learning and inspire success*. New York: Penguin Books.
- Boaler, J. (2016a). *Mathematical Mindsets*. San Francisco CA: Jossey-Bass.
- Boaler, J. (2016b). *Why Kids Should Use Their Fingers in Math Class*. Retrieved on 25th February 2017 from: <https://www.theatlantic.com/education/archive/2016/04/why-kids-should-use-their-fingers-in-math-class/478053/>
- Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H. G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110–119). Bielefeld, Germany: Universität Bielefeld.
- Crowe, F. E., & Doran, R. M. (1957)(Eds.). *Collected Works of Bernard Lonergan. Insight: A study of human understanding*. Toronto: University of Toronto Press.
- Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 6-33.
- Doidge, N. (2008). *The brain that changes itself: Stories of personal triumph from the frontiers of brain science (Revised Edition)*. Melbourne: Scribe Publications Pty Ltd.
- Dweck, C.S. (2006) *Mindset: the new psychology of success*. New York: Ballantine Books.
- Ellerton, N. F., & Olson, J. (2005). The assessment dilemma: Correct answers with no understanding and incorrect answers with some understanding. In H. S. Dhindsa, I. J. Kyeleve, O. Chukwu, & J. S. H. Q. Perera (Eds.), *Future directions in science, mathematics and technical education*, (Proceedings of the Tenth International Conference, pp. 226-235). Brunei Darussalam: University Brunei Darussalam.
- Lakoff, G., & Nunez, R. E. (2000). *Where Mathematics comes from*. NY: Basic Books.
- Leung, F. K. S. (2014). What can and should we learn from international studies of mathematics achievement? *Mathematics Education Research Journal*, 26(3), 579-605.

- MacKay, R.F. (2013). *The Stanford Report*. Retrieved on 25th December 2016 from: <http://news.stanford.edu/news/2013/march/games-education-tool-030113.html>
- Penner-Wilger, M., Fast, L., LaFevre, J., Smith-Chant, B. L., Skwarchuck, S., Kamawar, D., et al. (2007). The Foundations of Numeracy: Subitizing, Finger Gnosia, and Fine Motor Ability. *Proceedings of the Cognitive Science Society*, 29. Retrieved on 3rd March 2017 from: <http://escholarship.org/uc/item/8vb45554>
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. (1977). Professor Richard Skemp, interview by Michael Worboys. *Mathematics in School*, 6 (2), 14-15.
- Skemp, R. (1979). *Intelligence, learning and action*. Chichester: Wiley & Sons.
- Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics (2nd ed)*. London: Penguin Books.
- Skemp, R. (1989). *Mathematics in the primary school*. London: Routledge.
- Skemp, R. (1992). Bringing theory into the classroom: The school as a learning environment for teachers. In B. Southwell, B. Perry, & K. Owens (Eds.). *Space - The first and final frontier, conference proceedings, fifteenth annual conference of the mathematical education research group of Australia* (pp. 44-54). UWS Nepean, Sydney: MERGA.
- Sousa, D. A. (2008). *How the brain learns mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Skinner, B. F. (1953). *Science and human behavior*. New York: Free Press.
- Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (Eds.)(1995). *The nature of insight*. Cambridge, MA, US: The MIT Press.
- Thurston, W. (1990). *Mathematical education. Notices of the American Mathematical Society*, 37(7), 844-850.
- White, A. L. (2011). School mathematics teachers are super heroes. *South East Asian Mathematics Education Journal*, 1(1), 3-17.
- White, A. L. (2013). Mathematics education research food for thought with flavours from Asia. *South East Asian Mathematics Education Journal*, 3(1), 55-71.
- White, A. L. (2014). Juggling Mathematical Understanding. *Southeast Asian Mathematics Education Journal*, 4(1), 57-67. ISSN 2089-4716.

MATEMATIKA: PENALARAN DENGAN CINTA

A.N.M. SALMAN

Kelompok Keahlian Matematika Kombinatorika
Institut Teknologi Bandung
msalman@math.itb.ac.id

Abstrak: Matematika adalah bahasa logika bagi pemikiran-pemikiran yang abstrak dan hukum alam yang konkret, serta sekaligus seni yang kreatif. Matematika disusun dari istilah asal dan definisi dengan landasan aksioma yang tepat sehingga dapat dibangun struktur teorema yang kokoh. Pembangunan struktur tersebut hanya dapat dilakukan dengan penalaran yang memerlukan pemikiran logis, sistematis, kritis, kreatif, dan efektif. Pemikiran tersebut akan optimal jika dimulai dengan menyebut nama-Nya dan dilakukan dalam suasana cinta, serta dengan tujuan untuk menambah cinta dari Sang Maha Pencinta sehingga membahagiakan.

Kata Kunci: Penalaran, Kompetensi Strategis, Pembelajaran Membahagiakan

PENDAHULUAN

Mahasuci Allah yang telah menciptakan manusia pertama (Nabi Adam A.S) dan mengilhamkan kepadanya penalaran yang baik sehingga memungkinkan beliau mendefinisikan fungsi dengan domain himpunan benda ke himpunan nama alam semesta (Q.S.2:33). Dengan penalaran yang baik, manusia dijadikan sebagai makhluk yang sempurna sehingga malaikat pun diperintahkan untuk bersujud kepadanya. Pengakuan ini diberikan kepada manusia yang telah menggunakan akal pikirannya untuk kebajikan dengan berfokus kepada pengabdian terbaik kepada Penciptanya.

Seiring pula dengan saat semesta diciptakan, gagasan tentang bilangan serta membilang turut pula dimunculkan. Dengan adanya beberapa benda di alam semesta pada masa awal kelahirannya, gagasan tentang bilangan asli muncul. Bilangan asli merupakan modal awal dari manusia untuk mempelajari matematika (Pranoto, 2012).

Matematika terus berkembang seiring dengan keinginan manusia untuk menyelidiki keteraturan dan keindahan yang ada pada alam semesta. Sungguh, Dia telah menciptakan semuanya dalam keteraturan yang amat indah. Semuanya tunduk dalam kerendahan dan tasbih membesarkan-Nya. Meskipun kadang terlihat sesuatu agak acak, namun sesungguhnya semua berlangsung mengikuti hukum-Nya. Ada keindahan struktur dan pola di sana. Matematika merupakan suatu bahasa yang terus berkembang untuk mempelajari struktur dan pola. Berakar dalam dan berkembang seiring dengan realitas yang terbuka dan didorong dengan keingintahuan intelektual manusiawi untuk menyingkap keindahan pola yang ada dan sekaligus untuk memberikan manfaat bagi kelangsungan hidup manusia.

Lebih dari enam milenium telah ditemukan matematika oleh manusia dari berbagai belahan dunia dan dalam waktu yang berkelanjutan. Hal ini didasari fakta bahwa pada sekitar 3500 tahun sebelum Isa telah ditemukan matematika di Mesir. Kemudian, ditemukan pula matematika di Babylonia sekitar 2000 tahun sebelum Isa, di Cina sekitar 1300 tahun sebelum Isa, dan di India semenjak 800 tahun sebelum Isa. Matematika di

Yunani baru dikenal mulai 600 tahun sebelum Isa, walau pun mungkin sudah ada sebelumnya. Selanjutnya di Arab dikenal matematika mulai tahun 755 (Ansjar, 2009).

Matematika merupakan disiplin yang mempelajari obyek yang bebas dari faktor alam dan dikembangkan oleh manusia di beberapa tempat dalam waktu yang berbeda. Hanya saja, ada ketakjuban kita bahwa beberapa gagasan matematika yang 'diciptakan' secara terpisah oleh manusia yang bisa jadi tidak saling kenal dari tempat dan waktu berbeda pula, tetapi terdapat relasi yang mengkaitkannya. Sebagai contoh bilangan eksponen natural e , bilangan irasional, bilangan imajiner i , dan bilangan bulat 0 didefinisikan oleh manusia yang berbeda pada waktu berbeda. Namun, dalam rumus Euler, semuanya memenuhi persamaan matematika yang indah yakni. Ini seakan memberi isyarat kepada kita, bahwa tak mungkin matematika diciptakan secara benar-benar acak dan bebas, hanya berdasarkan pemikiran manusia semata. Dengan kata lain, matematika adalah juga ciptaan-Nya. Karena itu, manusia hanya menemukannya saja, tidak benar-benar menciptakannya. Untuk menemukan tersebut diperlukan kecakapan matematika dengan penalaran sebagai komponen utamanya.

Kilpatrick (2001) menyatakan bahwa kecakapan matematika diartikan sebagai komponen-komponen yang harus dimiliki seseorang untuk berhasil mempelajari matematika. Komponen tersebut meliputi pemahaman konsep, kelancaran prosedur, kompetensi strategis, penalaran adaptif, dan disposisi produktif. Lima komponen tersebut saling terjalin dan saling tergantung sehingga Kilpatrick menganalogikan kelima komponen tersebut sebagai helaian-helaian benang pembangun seutas tali. Kesuksesan sebuah komponen akan sangat membantu dalam membangun komponen-komponen kecakapan matematika yang lainnya.

BACA DENGAN NAMA PENCIPTA

Untuk mempelajari matematika, diperlukan pemahaman konsep yang baik. Mulailah dengan membaca nama-Nya. Bacalah dengan membesarkan-Nya dan memohon pertolongan-Nya sehingga diberi pemahaman yang benar.

Ya Allah, jadikanlah di ruang hati kami cahaya.

Jadikan di pikiran kami cahaya.

Jadikan di pendengaran kami cahaya.

Jadikan pada penglihatan kami cahaya.

Jadikan pula pada lisan kami cahaya.

Jadikan dari belakang kami cahaya.

Jadikan dari depan kami cahaya.

Jadikan dari atas kami cahaya,

dan jadikan dari bawah kami cahaya.

Ya Allah, karuniakan pada kami cahaya.

(H.R. Muslim)

Dialah Yang Maha Mengetahui dan sebagai hamba-Nya sungguh merupakan suatu kepatutan jika proses ini dimulai dengan menyebut nama-Nya. Pemahaman yang

benar ini diperlukan agar dimungkinkan untuk melakukan kajian yang lebih dalam dan membuka peluang yang lebih besar untuk menemukan solusi dari permasalahan atau menghasilkan teorema-teorema baru. Kemudian, teruslah berdoa, dan berikhtiar lebih baik.

Pemahaman konsep dalam matematika mengarah pada kemampuan untuk mengintegrasikan berbagai konsep dan memfungsikan konsep tersebut dengan benar sehingga dapat diaplikasikan dengan tepat. Apabila konsep matematika dapat dipahami dengan baik, dimungkinkan untuk merancang sebuah strategi untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan konsep tersebut.

Kilpatrick (2001) menyatakan bahwa indikator penting pada pemahaman konsep yaitu mampu merepresentasikan situasi matematika dalam berbagai cara sesuai dengan tujuan yang diinginkan. Tingkat pemahaman konsep tersebut sangat berkaitan dengan kekayaan dan keluasan koneksi yang telah dilakukan. Dengan koneksi yang kuat, dapat dihubungkan pengetahuan yang diketahui sebelumnya untuk menyelesaikan masalah baru yang mungkin belum dikenal sebelumnya. Indikator lainnya, mampu memaknai konsep yang dipelajari dan bahkan dapat digunakan untuk memodelkan masalah yang ada dengan menggunakan bahasa matematika. Masalah di sini diartikan dalam konteks yang luas, bisa konteks matematika sendiri atau konteks pada bidang lain. Dalam pemodelan tersebut tidak jarang diperlukan penyederhanaan model agar diperoleh solusi yang walau pun tidak eksak, namun dapat digunakan untuk menghampiri kenyataan yang sebenarnya. Untuk tahap awal, intuisi diperlukan agar penyederhanaan yang dilakukan masih menghasilkan hasil yang ‘cukup’ baik. Disini diperlukan ilham dari Yang Maha Mengetahui agar dituntun ke arah yang tepat. Sebutlah nama-Nya, dan tetaplah mohon petunjuk-Nya.

Selanjutnya, harus dimiliki kelancaran prosedur. Kilpatrick (2011) menyatakan bahwa kelancaran prosedur mengarah pada pengetahuan tentang suatu prosedur (metode), pengetahuan kapan dan bagaimana menggunakan prosedur tersebut dengan tepat, dan keterampilan dalam menggunakannya secara fleksibel, akurat, dan efisien. Ada pun yang dimaksud dengan prosedur adalah metode atau tata cara yang dilakukan untuk melakukan sesuatu. Kelancaran prosedur sangat berkaitan dengan pemahaman konsep. Pada dasarnya kedua aspek ini saling mendukung satu sama lain. Dengan pemahaman konsep yang baik, akan memudahkan dalam mempelajari dan menggunakan prosedur. Sebaliknya, kelancaran menjalankan prosedur dibutuhkan untuk mempelajari dan membangun pemahaman mengenai konsep. Jika kelancaran prosedur ini tidak didukung oleh pemahaman, pengetahuan, dan keterampilan, akan menyebabkan pengguna tidak tahu makna dari hasil prosedur tersebut. Selain itu, bisa jadi akan dialami kesulitan ketika berhadapan dengan situasi yang baru, walaupun masih berkaitan dengan apa yang telah dipelajari.

Sebelum lancar dalam menjalankan prosedur, diperlukan pemahaman terhadap prosedur tersebut agar prosedur tidak menjadi fakta yang terisolasi. Ada beberapa hal yang harus diperhatikan dalam menanamkan kelancaran dalam menggunakan prosedur. Pertama, pahami prosedur tersebut. Lalu, pahami bagaimana prosedur tersebut berjalan, kapan prosedur tersebut dipakai, dimana prosedur tersebut bisa dijalankan, dan pada konsep apa saja prosedur tersebut bisa diaplikasikan. Selain itu, usahakan untuk terus

mencari prosedur yang lebih efektif dan efisien sehingga dihasilkan prosedur yang lebih baik. Tetap baca nama- Nya agar ada yang membimbing untuk menemukan kecakapan untuk membuat prosedur tersebut menjadi lebih fleksibel, akurat, dan efisien dalam penggunaannya.

Kecakapan matematika berikutnya yang harus dikuasai adalah kompetensi strategis. Paling tidak ada lima hal yang diperlukan, yakni: 1) kemampuan merumuskan dan menyelesaikan masalah, 2) kemampuan berargumentasi, 3) kemampuan berkomunikasi, 4) kemampuan membuat koneksi, dan 5) kemampuan representasi.

Kemampuan merumuskan dan menyelesaikan masalah sangat diperlukan karena belajar matematika pada umumnya adalah belajar dari masalah dan belajar menyelesaikan masalah. Untuk itu, kompetensi awal yang diperlukan adalah kemampuan untuk bisa merumuskan masalah dengan baik, termasuk kemampuan untuk menetapkan asumsi agar masalah dapat disederhanakan. Masalah yang telah dirumuskan dengan baik, relatif lebih mudah untuk ditentukan solusinya. Ada pun dalam penyelesaian masalah, diperlukan keberanian untuk mencoba dan mencoba. Bisa jadi metode yang dilakukan adalah dengan menggunakan metode yang bisa digunakan untuk masalah yang hampir serupa, walaupun kadang diperlukan modifikasi dan penyesuaian serta pengembangan metode. Tidak tertutup kemungkinan untuk penyelesaian masalah diperlukan metode yang tidak biasa. Di sini diperlukan kreativitas. Tentunya, sangat diperlukan pertolongan Yang Maha Mengetahui berkenan mengilhami kreativitas tersebut.

Hasil pemikiran yang diperoleh harus didukung dengan argumentasi yang benar berdasarkan definisi, aksioma, atau teorema yang telah ada sebelumnya. Setiap langkah harus dilandasi dengan pemikiran yang logis. Selanjutnya diperlukan kemampuan untuk bisa mengkomunikasikan pemikiran tersebut. Komunikasi yang dilakukan dapat melalui lisan dan dapat pula menggunakan tulisan. Hanya saja pada tahap ini diperlukan kemampuan untuk menjelaskan dan menyimak dengan baik. Hasil pemikiran yang baik selayaknya disampaikan pula dengan cara yang baik, penuh kesopanan dan kesantunan. Pada tahap ini, diperlukan juga kemampuan untuk mempertahankan pendapat jika memang memiliki pendapat yang benar; dan kemampuan untuk mengakui pendapat lain jika memang pendapat tersebut lebih baik. Sesungguhnya yang dicari adalah penyelesaian yang lebih baik.

Selanjutnya diharapkan adanya kompetensi untuk membuat koneksi dengan hasil/pengetahuan sebelumnya. Di sini juga diperlukan kemampuan untuk membuat peta konsep sehingga memudahkan dalam pengembangan selanjutnya. Dari segi karakter, diperlukan sikap untuk dapat memberi apresiasi kepada pihak lain yang telah berkontribusi. Seseorang dibiasakan untuk mengakui hasil capaian orang lain. Karena itu, biasakan untuk menyebutkan nama kontributor sebelumnya. Kompetensi berikutnya adalah kemampuan untuk menyajikan abstraksi internal melalui simbol matematika sebagai reproduksi mental atau skema kognitif yang dibangun melalui pengalam belajar.

Kompetensi strategis merupakan modal utama yang harus dimiliki seseorang agar bisa menyelesaikan masalah, terutama masalah nonrutin. Kemampuan kompetensi strategis sangat bergantung pada pemahaman konsep dan kelancaran prosedur. Dengan kemampuan kompetensi strategis diharapkan pembelajar matematika dapat

menyelesaikan masalah sehari-hari dengan menggunakan cara-cara penalaran matematika.

BERNALAR DENGAN LEBIH BAIK

Penalaran merupakan salah satu kejadian dari proses berpikir. Menurut Kamus Besar Bahasa Indonesia, berpikir adalah menggunakan akal budi untuk mempertimbangkan dan memutuskan sesuatu. Akal adalah daya pikir untuk memahami sesuatu. Budi adalah alat batin yang merupakan panduan akal dan perasaan untuk menimbang baik dan buruk. Dengan demikian, penalaran merupakan proses dari akal budi manusia yang berusaha untuk mendapatkan keterangan baru dari sesuatu atau beberapa keterangan lain yang telah diketahui dengan memperhatikan baik dan buruknya, serta keterangan yang baru itu merupakan urutan kelanjutan dari sesuatu atau beberapa keterangan semula.

Mempelajari matematika melalui penalaran akan menimbulkan dampak yang sangat positif yakni akan dapat menemukan/merasakan matematika lebih bermakna, karena dengan penalaran dimungkinkan penemuan hubungan antara pengetahuan baru dengan pengetahuan yang dimiliki sebelumnya. Hal ini memungkinkan terjadinya proses integrasi pengetahuan dan kemampuan akal untuk melihat aktivitas matematika sebagai sesuatu yang sangat berharga.

Dalam pembelajaran matematika diperlukan kemampuan berpikir matematis yakni kemampuan untuk berpikir logis, sistematis, kritis, kreatif, dan efektif. Kemampuan tersebut diperlukan untuk memahami dan merumuskan permasalahan, mencari alternatif solusi, dan menentukan solusi terbaik, serta mengkomunikasikan solusi yang diperoleh. Berpikir logis diartikan bahwa pemikiran tersebut harus mengikuti kaedah berpikir sesuai dengan logika. Pada saat mengintegrasikan sejumlah ide menjadi satu kesatuan yang koheren perlu diperhatikan dua hal yakni: pertama membuat langkah-langkah berbeda yang bergerak di baris penalaran yang terhubung satu sama lain; dan kedua membuat hubungan antara alasan-alasan mengapa satu gerakan mengikuti gerakan yang lain dan bagaimana sejumlah gerakan datang bersama-sama untuk membentuk suatu argumen dalam memecahkan masalah.

Informasi matematika dibangun dan diyakinkan kebenarannya berdasarkan logika deduktif yang berdasarkan asumsi. Metode ilmiah Aristoteles (384 – 322 SM) sekaligus menggunakan logika deduktif dan logika induktif yang berdasarkan pengamatan. Metode deduktif mengambil kesimpulan dari yang umum ke yang khusus sedangkan dengan metode induktif sebaliknya. Dalam penemuan informasinya matematika dibangun dengan kedua logika ini, tetapi penyajian buku teks lebih banyak dengan logika deduktif. Meskipun demikian matematika lebih nyaman dipelajari dengan logika induktif – deduktif.

Untuk memahami sistem yang kompleks diperlukan kemampuan dalam menganalisis bagian-bagian sistem dan kemudian memahami pola hubungan yang terdapat di dalam setiap unsur penyusun tersebut dalam sistematis yang jelas. Diperlukan pula kemampuan untuk menyaring/memilah informasi sehingga perhatian dapat difokuskan hanya kepada informasi yang sah. Sering dalam memahami/

menggunakan fakta untuk menyelidiki kebenaran konjektur atau dalam pemecahan masalah diperlukan kreativitas.

Ada beberapa tahapan berpikir kreatif yakni: orientasi, preparasi, inkubasi, iluminasi, dan verifikasi. Pada tahapan orientasi, dilakukan perumusan masalah dengan identifikasi berbagai aspek. Masalah harus dipahami dengan jelas. Karena itu, masalah harus dirumuskan dengan tepat. Kemudian, perlu dilakukan pengumpulan informasi yang relevan dengan masalah yang dikaji. Pada tahap preparasi ini diperlukan kemampuan berpikir kritis sehingga informasi yang diperhatikan lebih dalam adalah informasi yang betul-betul diperlukan. Proses berpikir dan perenungan dilanjutkan dengan inkubasi yakni proses jalan terus dalam bawah sadar ketika menemui jalan buntu. Pada tahap ini, amat diperlukan terjadinya iluminasi yakni adanya ilham dari Yang Mahakuasa sebagai gagasan pemecahan masalah. Tetaplah sebut nama-Nya dan sugesti diri bahwa Dia pasti akan mengilhamkan ilmu buat hamba yang bersungguh-sungguh untuk mendapatkannya. Tahap berikutnya, ide yang tercetus perlu dilakukan verifikasi yakni pengujian secara kritis dan setiap langkah perlu dievaluasi kebenaran/kelogisannya.

NCTM (2000) menyatakan bahwa penalaran merupakan sebuah kebiasaan berpikir, sehingga perlu ada konsistensi dalam mengembangkannya. Kebiasaan ini perlu dimulai dari awal. Pembelajar harus dibiasakan untuk memberikan alasan yang benar untuk setiap langkah pekerjaannya dari mulai pemilihan prosedur sampai kepada kesimpulan dari hasil pemikirannya. Lakukanlah terus perbaikan dan perbaikan sehingga proses penalaran merupakan suatu proses optimasi. Jangan berhenti pada level baik jika lebih baik memungkinkan. Jika telah didapatkan satu solusi, perlu didorong untuk mencari solusi lain yang lebih baik. Munculkan tantangan untuk mendapatkan solusi terbaik (Salman, 2011).

Penalaran adaptif berinteraksi dengan aspek kecakapan matematika lain, khususnya selama pemecahan masalah berlangsung dan lebih berperan ketika penentuan legitimasi pada strategi yang diajukan. Sering sebuah solusi membutuhkan kelancaran dalam prosedur penghitungan, pengukuran. Di sini penalaran adaptif diperlukan untuk menentukan ketepatan prosedur yang digunakan.

DISPOSISI PRODUKTIF YANG MEMBAHAGIAKAN

Kilpatrick (2001) menyatakan bahwa disposisi produktif mengarah pada kecenderungan untuk melihat makna matematika, untuk merasa bahwa matematika berguna dan bermanfaat, untuk percaya bahwa usaha secara terus menerus dalam belajar matematika akan terbayar, dan untuk melihat diri sendiri sebagai pembelajar matematika dan pelaku matematika. Disposisi produktif dibangun ketika komponen kecakapan lain dilakukan. Sebagai contoh, siswa membangun kompetensi strategis pada masalah nonrutin, sikap dan keyakinan mereka sebagai pembelajar matematika menjadi lebih positif. Semakin banyak konsep matematika yang mereka pahami, semakin peka terhadap matematika. Sebagai perbandingan, ketika jarang diberikan tantangan masalah matematika, mereka hanya mengandalkan ingatan daripada membuka jalan untuk mempelajari matematika dan mereka mulai kehilangan percaya diri sebagai pembelajar. Sama halnya ketika siswa melihat dirinya mampu mempelajari matematika dan menggunakannya untuk menyelesaikan masalah, mereka menjadi mampu

mengembangkan lebih jauh kelancaran prosedural atau kemampuan penalaran mereka. Sikap siswa terhadap matematika merupakan faktor utama dalam menentukan kesuksesan pendidikannya.

Di sisi lain, guru matematika memainkan peran untuk menumbuhkan harapan siswa dan memelihara sikap positif terhadap matematika. Pandangan guru terhadap matematika dan pembelajarannya mempengaruhi cara mengajar guru, yang pada akhirnya tidak hanya berpengaruh terhadap apa yang siswa pelajari tetapi juga bagaimana mereka memandang dirinya sebagai pembelajar matematika. Guru dan siswa bisa saling bernegosiasi dalam mengelola pembelajaran matematika untuk memungkinkan setiap siswa nyaman selama bekerja matematika dan berbagi idenya dengan yang lain, mereka akan melihat dirinya mampu dalam memahami matematika. Siswa yang telah mengembangkan kemampuan disposisi produktif menjadi percaya diri terhadap pengetahuan dan kemampuannya. Mereka melihat bahwa matematika masuk akal dan dapat dimengerti dan percaya bahwa dapat dipelajari. Sikap positif ini perlu dikembangkan dan ditularkan sehingga hari-hari mendatang akan diisi dengan sikap optimis dalam suasana pembelajaran yang menyenangkan sebagai dampak dari kebahagiaan yang diperoleh. Sikap positif ini dimungkinkan jika dapat dibangun emosi positif dalam diri si pengajar dan si pembelajar. Frederickson menyebutkan bahwa ada empat keadaan emosi positif yakni: ceria (*joy*), tertarik (*interest*), puas (*contentment*), dan kasih sayang (*love*).

Pembelajaran yang menyenangkan memiliki beberapa indikator, antara lain berhasil membangkitkan minat, adanya keterlibatan penuh, dan terciptanya makna, pemahaman/ penguasaan materi, serta munculnya perasaan yang membahagiakan pada diri si pembelajar dan si pengajar. Untuk terjadinya akselerasi pencapaian pembelajaran yang menyenangkan, diperlukan adanya cinta terhadap matematika. Cinta yang tidak hanya terbatas pada materi matematikanya saja, namun lebih jauh dari itu, cinta yang dilahirkan karena adanya kerinduan akan pengakuan dari Zat Yang Maha Pecinta terhadap hamba yang menggunakan nalarnya untuk mempelajari keindahan ilmu-Nya.

PENUTUP

Awali dengan menyebut nama-Nya yang Maha Mengetahui untuk memulai mempelajari Matematika sebab Dialah pemiliknya. Selanjutnya, pergunakan nalar untuk memahami definisi dan aksioma, serta mengkaji bukti dari teorema. Beranilah untuk mencoba dan terus mencoba dengan cinta sehingga ada teorema baru. Nikmati proses yang terjadi, rasakan ada keindahan, dan syukuri hasil yang didapati dalam suasana cinta-Nya.

Selanjutnya, ajarkanlah matematika dengan benar dan dengan cara yang baik serta didukung oleh buku referensi yang bermutu baik dari segi isi, maupun dari cara penyajiannya (Rona dan Salman, 2016). Kita selayaknya bermimpi bahwa tidak lama lagi matematika akan menjadi pelajaran yang lebih disukai siswa, pelajaran yang dianggap ‘sahabat’ mereka, pelajaran yang dekat dengan kehidupan sehari-hari mereka, pelajaran yang menantang penggunaan logika siswa, logika yang beenergikan cahaya-Nya. Selain itu, pelajaran matematika yang juga mengembangkan karakter siswa dan gurunya.

Karakter atau akhlak merupakan aspek terpenting dalam diri manusia yang harus senantiasa dikembangkan dan dibina dengan baik, sebagaimana diketahui bahwa Rasulullah diutus untuk menyempurnakan akhlak yang mulia. Pada pembelajaran matematika beberapa karakter yang diharapkan muncul antara lain: kecermatan dalam melakukan pekerjaan, mampu berpikir logis, kritis, sistematis, kreatif, dan efektif, konsisten dalam bersikap, jujur, taat pada aturan, gigih untuk memperoleh yang lebih baik, dan bersikap demokratis. Apabila sudah diawali dengan keyakinan yang baik dan benar, maka proses dan hasilnya pun akan baik sesuai dengan yang diharapkan. Berdasarkan hal tersebut, selain memperhatikan kecakapan matematika, penting untuk merancang karakter positif yang diharapkan muncul pada siswa. Oleh karena itu, sangat penting untuk mendesain kegiatan pembelajaran yang memungkinkan terjadinya pengembangan karakter.

Terkait dengan ini, peningkatan kualitas pembelajaran matematika di setiap jenjang pendidikan mutlak diperlukan antara lain dengan penyempurnaan kurikulum dan metode pembelajaran, peningkatan pemahaman dan etos kerja matematika para siswa dan guru. Selain itu, diperlukan usaha untuk membangkitkan minat di dalam diri siswa sehingga ada keinginan dan kesungguhan untuk mempelajari materi dengan baik dan benar. Ini akan efektif jika guru dapat menunjukkan antusiasnya dalam mengelola proses pembelajaran. Salah satu yang dapat dijadikan motivasi untuk itu adalah keyakinan bahwa Tuhan amat mencintai dan mengangkat derajat hamba-hamba-Nya yang berilmu. Keyakinan bahwa belajar dan mengajar adalah ibadah akan membuat siswa dan guru berusaha mempersembahkan yang terbaik kepada Tuhan Yang Maha Esa (Salman, 2012).

Matematika berperan dalam menata dunia.
Aksioma dilahirkan dari nilai istimewa.
Terdefinisi penuh makna untuk semua.
Efektif dengan keoptimalan informasi berguna.
Menghasilkan rangkaian teorema menggunakan logika.
Antarkan karya demi kesejahteraan manusia.
Tetap konsisten perbuatan dengan kata.
Irisan keuletan, kejujuran, semangat bersama.
Kombinasikan dengan kelembutan sentuhan cinta.
Abadi terbaik dirihai yang Mahakuasa.
(Salman, 2011)

DAFTAR RUJUKAN

- Ansjar, M. 2009. *Matematika: Pemanfaatan untuk Bangsa dan Kehidupan Berbangsa*, MGB ITB.
Kilpatrick, J. 2001. *Adding It Up; Helping Children Learn Mathematics*. Washington DC: National Academy Press.
NCTM (2000): *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM
Pranoto, I. 2012. *Menggal Hakikat Bermatematika Melalui Pengembangan Teori Kontrol*, MGB ITB.

- Ronawan, Salman, A.N.M. 2016. Materi Teorema Pythagoras untuk Siswa SMP/MTs dengan Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik untuk Mengembangkan Kecakapan Matematika Siswa, *Prosiding Simposium Nasional Inovasi dan Pembelajaran Sains*, 907-916.
- Salman, A.N.M. 2012. *Teori Graf: Memaknai Titik dan Garis*, MGB ITB.
- Salman, A.N.M. 2011. Matematika: Dari Definisi dan Aksioma Menuju Cinta, *Prosiding Simposium Nasional Inovasi dan Pembelajaran Sains*, 7-13.

BERPIKIR MATEMATIS DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA: SEBUAH ANALISIS SECARA TEORITIS DAN PRAKTIS

Subanji

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang

subanji.fmipa@um.ac.id

Abstrak: Kajian proses berpikir dalam mengonstruksi konsep matematika sangat penting, karena matematika memiliki objek kajian yang abstrak. Pengonstruksian konsep matematika dapat dikaji berdasarkan teori berpikir atau teori konstruksi. Tulisan ini mengkaji pengonstruksian konsep matematis berdasarkan teori pemrosesan informasi, struktur mental APOS dan mekanisme konstruksi konsep. Berpikir matematis dalam mengonstruksi konsep matematika berdasarkan teori pemrosesan informasi prosesnya mencakup: *sensory memory*, *short-term memory*, dan *long-term memory*. Konstruksi konsep matematika ditinjau dari struktur mental bisa berbentuk: *action*, *processes*, *object*, *schema* dan jika ditinjau dari mekanisme pembentukan pengetahuan matematis berupa proses: *interiorization*, *coordination*, *reversal*, *encapsulation*, dan *de-encapsulation*.

Kata kunci: Berpikir Matematis, Konstruksi Konsep Matematika

LATAR BELAKANG

Berpikir merupakan aktifitas yang sangat penting dalam kehidupan manusia. Entitas dari manusia adalah berpikir. Ketiadaan berpikir berarti pula ketiadaan manusia. Pentingnya berpikir bagi manusia dapat digunakan untuk membedakan antara manusia dan makhluk lain. Manusia sebagai makhluk berpikir yang dikarunia oleh Tuhan tiga unsur penting, yakni cipta, rasa, dan karsa. Subanji dkk (2014) menjelaskan bahwa unsur cipta (budi) berkenaan dengan akal (rasio) yang terkait dengan muncul dan berkembangnya ilmu (*science*) dan teknologi. Unsur rasa (estetika) akan menimbulkan nilai seni (*art*). Dengan rasa itu manusia menilai mana yang indah dan mana yang tidak indah. Ini terkait dengan "nilai keindahan". Unsur karsa akan menimbulkan etika atau moral. Dengan karsa itu manusia menilai mana yang baik dan mana yang tidak baik. Ini terkait dengan "nilai kebaikan" atau "nilai moral". Akal manusia yang teraktualisasi dalam bentuk berpikir memiliki peran sangat penting untuk menilai mana yang benar dan mana yang salah berdasarkan kenyataan yang diterima oleh akal. Salah satu aspek berpikir yang khusus adalah berpikir matematis.

Berpikir matematis berbeda dengan berpikir empiris, meskipun sebagian berpikir matematis berkembang dari berpikir empiris. Berpikir empiris terikat oleh fenomena empiris yang selanjutnya berkembang dan menjadi dasar ilmu sains. Berpikir matematis berkembang lebih leluasa, tidak terikat oleh fenomena. Yang lebih penting dalam berpikir matematis adalah struktur berpikir/bernalarnya yang masuk akal, meskipun "mungkin" tidak ada objek empirisnya atau tidak mampu digambarkan secara empirik. Berpikir matematis menjangkau yang tak terjangkau oleh berpikir empiris. Sebagai contoh adanya berpikir deduktif dalam matematika yang tidak bisa dilihat secara empirik dan hanya bisa diukur dengan "penalaran logis". Hal ini terjadi karena berpikir matematis merupakan berpikir yang didasari oleh karakteristik matematika.

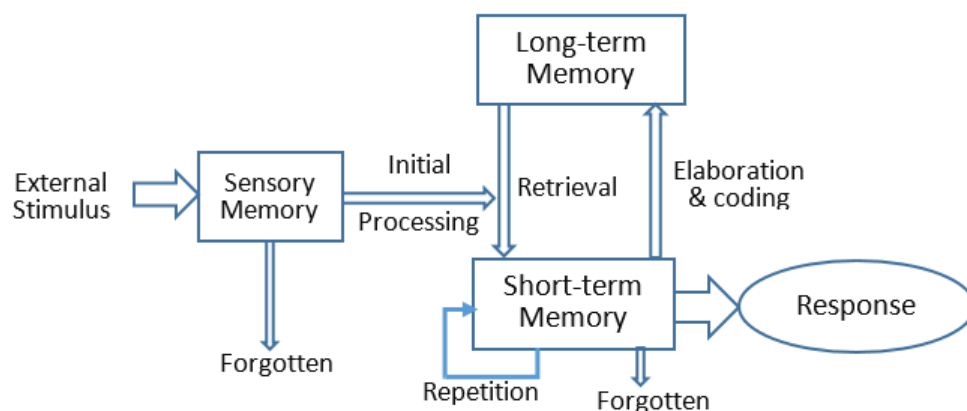
Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang memiliki karakteristik: objek kajian yang abstrak, bertumpu pada kesepakatan, berpola pikir deduktif, memiliki simbol

yang kosong dari arti, memperhatikan semesta pembicaraan, dan konsisten dalam sistemnya (Soedjadi, 2000). Objek kajian yang abstrak disebut juga objek mental yang ada dalam pikiran yang memiliki objek dasar: (1) fakta, (2) konsep, (3) operasi, (3) prinsip. Dari objek dasar disusun suatu pola dan struktur matematika. “Kekuatan” matematika terletak pada keleluasaan dalam menyusun pola dan struktur matematika. Berpikir merupakan modal utama dalam menyusun pola dan struktur matematika. Karena itu matematika sebagai ilmu yang memiliki ciri khas pengembangan berpikir dengan objek mental sebagai kajiannya. Bahkan matematika juga sering diidentikkan dengan ilmu berpikir, sehingga ada interpretasi umum bahwa siswa yang mampu dalam “matematika” dipandang sebagai siswa yang pandai (cerdas) dan memiliki kemampuan berpikir tingkat tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa berpikir matematis sangat penting untuk dikaji dalam konteks belajar matematika.

Pentingnya berpikir matematis menjadi bahan kajian menarik dalam penelitian pendidikan matematika (Blanton, dkk., 2015; Leatham, dkk., 2015; Mason dkk, 2010; Tall, 2009). Blanton dkk (2015) menjelaskan bahwa pengembangan berpikir aljabar bisa dilakukan dengan intervensi. Leatham, dkk. (2015) menekankan pentingnya pemahaman konsep matematis untuk membangun berpikir siswa. Mason dkk. (2010) mengaji proses berpikir matematis dalam pemecahan masalah matematika. Tall (2009) menemukan bahwa berpikir matematis dapat dikembangkan melalui pemecahan masalah dan pembuktian. Pengembangan berpikir matematis merupakan salah satu hal utama dalam belajar matematika. Matematika sebagai materi yang memiliki ciri khas pengembangan berpikir, meskipun sebagian proses konstruksi dibangun dari konteks kehidupan.

PROSES BERPIKIR BERDASAR KONSTRUKSI PENGETAHUAN MATEMATIS

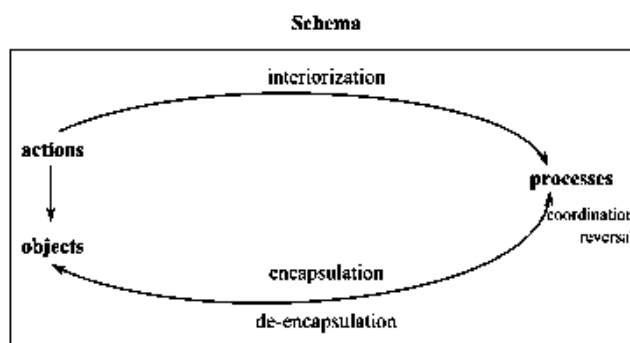
Konstruksi pengetahuan matematis bisa dibahas menggunakan bermacam-macam teori konstruksi, namun dalam tulisan ini hanya dibahas dua kerangka teoritis tentang konstruksi pengetahuan matematis, yakni teori pemrosesan informasi, teori APOS (aksi-proses-objek, skema) termasuk abstraksi reflektif. Teori pemrosesan informasi dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 1. Teori Pemrosesan Informasi

Teori pemrosesan informasi menjelaskan konstruksi pengetahuan, mulai dari masuknya informasi, penyaringan, pengolahan, penyimpanan, sampai pemanggilan kembali informasi di penyimpanan pengetahuan. Informasi yang banyak (berupa stimulus dari luar) setiap saat masuk dan diseleksi melalui sensory memory. Informasi yang tidak penting diabaikan (dilupakan), sedangkan informasi penting dilanjutkan ke *short-term memory* sekaligus diproses dengan memanfaatkan (memanggil) informasi yang ada di *long-term memory*. Terdapat 4 (empat) hasil pemrosesan informasi, kelanjutan dari *short-term memory*, yakni: (1) hasil pemrosesan yang tidak penting dilupakan, (2) hasil pemrosesan yang sangat penting dan belum tuntas dalam pemrosesan akan diulang, (3) hasil pemrosesan yang perlu tindakan akan muncul respon, dan (4) hasil pemrosesan informasi yang sudah selesai dikoding dan disimpan di *long-term memory*.

Pembentukan pengetahuan juga bisa dikaji menggunakan struktur mental (APOS) dan mekanisme konstruksi pengetahuan yang disebut **abstraksi reflektif**. Struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan menggambarkan pembentukan pengetahuan dalam proses belajar. Arnon dkk (2014) menggambarkan struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan matematis seperti berikut.



Gambar 2. Struktur Mental dan Mekanisme Konstruksi Pengetahuan Matematis

Ketika seseorang menghadapi masalah matematika, dia akan meresponnya. Ini berarti ada struktur mental **actions** dan mekanisme konstruksi pengetahuan yang terjadi adalah **interiorization**, di mana dia akan menginteriorisasi komponen-komponen yang ada di masalah ke dalam struktur mentalnya. Komponen-komponen yang sudah diinteriorisasi diproses dalam struktur mental yang disebut **processes**. Mekanisme konstruksi pengetahuan matematika yang terjadi dalam pemrosesan ini adalah **coordination** dan **reversal**. Komponen-komponen diproses dengan dikoordinasikan antar komponen, termasuk urutan-urutannya diatur. Pengoordinasian komponen-komponen ini berlangsung secara terus menerus sampai membentuk pengetahuan yang bermakna, dengan kata lain terjadi mekanisme konstruksi pengetahuan matematis yang disebut **encapsulation** atau **de-encapsulation**. Komponen-komponen yang sudah diproses dan dikemas (dienkapsulasi) menjadi **objects** di struktur mental. Setelah menjadi object, pengetahuan tersebut dikaitkan dengan struktur pengetahuan yang sudah dimiliki, maka terbentuklah struktur mental yang disebut **schema**. Selanjutnya masalah yang penting adalah bagaimana konstruksi konsep terjadi jika dilihat dari proses berpikir. Dalam hal ini berpikir matematis dalam konteks nampaknya sangat penting dalam pembentukan konsep matematika.

BERPIKIR MATEMATIS DALAM KONTEKS: ANALISIS KONSTRUKSI KONSEP

Pembahasan “berpikir matematis dalam konteks” diawali dari beberapa kasus konstruksi berpikir yang memuat komponen logika berdasarkan konteks. Kasus yang dijadikan contoh mulai dari anak kecil sampai orang dewasa. Semua kasus yang disajikan diperoleh dari pengalaman penulis dalam berinteraksi dengan anak kecil dan berinteraksi dengan siswa atau mahasiswa. *Kasus pertama*, seorang Bapak sedang naik mobil dan berbincang dengan anaknya (5 tahun). Mobilnya sedang melintas di jalan Semeru, di saat itu terjadi dialog antara Anak (A) dan Bapaknya (B) sebagai berikut.

A: ayah ini jalan apa?

B: jalan semeru

A: salah ayah, ini bukan jalan semeru

B: Lho kok bisa, dari mana tahu bukan jalan semeru?

A: Ini jalan mobil, kalau di sana ada jalan kereta

B: oh...begitu

Dari dialog tersebut nampak bahwa konteks sangat menentukan jawaban dari masalah. Meskipun masalah tersebut sangat sederhana, namun bisa dianalisis berdasarkan teori pemrosesan informasi dan APOS (termasuk abstraksi reflektif).

Pertama, berdasar teori pemrosesan informasi, anak (A) tersebut merespon keadaan jalan semeru, di mana banyak mobil yang lewat dan menganggap situasi tersebut penting untuk didiskusikan, sehingga informasi diteruskan ke *short-term memory* dan merespon dengan mempertanyakan “ayah ini jalan apa?”. Dia juga browsing di *long-term memory* yang terkait dengan situasi tersebut dan ditemukan jenis transportasi, yakni ada mobil dan ada kereta dan disimpulkan jalan ini adalah jalan mobil. Di sisi lain, ayahnya sebagai orang dewasa yang sudah memiliki skema di *long-term memory* tentang nama jalan dan menganggap konteks yang sesuai dengan pertanyaan adalah jalan semeru. Kedua jawaban (Bapak dan Anak) tidak ada yang salah, tergantung konteksnya. Apabila konteks yang digunakan adalah fungsi jalan maka jawabannya jalan mobil, tetapi jika konteksnya nama jalan, maka jawabnya adalah Jalan Semeru. Hal ini menunjukkan bahwa konteks sangat penting dalam proses mengonstruksi konsep. Pentingnya konteks juga terjadi dalam mengonstruksi konsep matematika. Sebagai contoh, ketika siswa diminta untuk menyelesaikan masalah “tentukan himpunan penyelesaian dari $2x + 3 = 6!$ ”, siswa langsung bisa mengubah menjadi $2x = 3$ dan selesaiannya $\{3/2\}$. Jawaban siswa tersebut benar kalau konteks (semesta) nya bilangan rasional (atau bilangan real), tetapi jika konteks (semesta) nya bilangan bulat, persamaan tersebut selesaiannya himpunan kosong.

Kedua, analisis berdasarkan teori APOS, anak (A) merespon masalah “jalan” sebagai bentuk struktur mental **action** dan mekanisme konstruksi dilakukan dengan **interiorization**, di mana Anak menginteriorisasi komponen-komponen, yakni ada mobil, jalan, hubungan antara mobil dan manfaat jalan. Berdasarkan komponen-komponen tersebut, diproses dalam struktur mental **processes**. Dalam pemrosesan ini juga melibatkan pengetahuan yang sudah dimiliki dan diungkap, bahwa ada jenis kendaraan “kereta api” yang juga memiliki jalan tersendiri (berbentuk rel). Mekanisme konstruksi

yang dilakukan anak adalah **coordination**, yakni mengkoordinasikan "ada kereta api, maka ada jalannya yang disebut rel", jika ada mobil maka ada jalannya sendiri, yakni yang sedang dia hadapi. Dari proses koordinasi tersebut, dienkapsulasi bahwa jalan yang ditanyakan tersebut merupakan jalan mobil (bukan jalan semeru). Hal ini menunjukkan terbentuknya struktur mental **object**, bahwa ada pasangan kereta dengan rel dan mobil dengan "jalan". Dari struktur mental yang berbentuk object tersebut diikatkan ke tema pengetahuan yang sudah dimiliki, yakni masing-masing kendaraan memiliki jalan masing-masing. Hal ini menunjukkan sudah terbentuknya struktur mental **schema**.

Kasus kedua terkait dengan konstruksi konsep bilangan pecahan (rasional). Penelusuran terhadap proses konstruksi konsep bilangan rasional dilakukan dalam dua bentuk: (1) secara individu melalui wawancara mendalam dan (2) secara klasikal melalui diskusi-investigatif di dalam proses perkuliahan. Wawancara mendalam dilakukan kepada dua orang mahasiswa pendidikan dasar pada saat ujian komprehensif lisan. Diskusi-investigatif dilakukan di dua kelas berbeda Pendidikan Dasar yang sedang menempuh matakuliah Praktik Lapangan (KPL) dan matakuliah pengembangan bahan ajar. Pertanyaan yang diberikan adalah sebagai berikut.

Dari dua pernyataan berikut, mana yang benar? Beri alasannya!

1. Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional
2. Himpunan bilangan rasional bagian dari himpunan bilangan bulat

Dari masalah tersebut, mahasiswa (secara individu maupun klasikal) menjawab bahwa "himpunan bilangan rasional bagian dari himpunan bilangan bulat". Jawaban tersebut "sangat" mengagetkan peneliti, sehingga dilakukan penelusuran lebih mendalam. Paparan ini meringkas proses penelusuran dari hasil wawancara dan diskusi investigatif, antara peneliti (P) dan Subjek (S).

P: Menurut Anda, dari dua pernyataan itu mana yang benar?

S: bilangan rasional itu kan bilangan pecahan sehingga merupakan bagian dari bilangan bulat

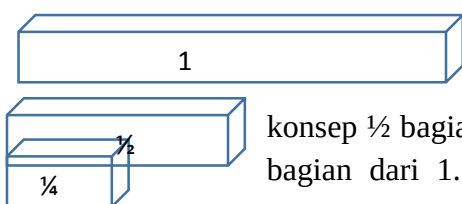
P: Bisakah memberikan contoh beberapa bilangan **rasional** (atau kamu sebut **pecahan**) dan beberapa bilangan bulat?

S: contoh bilangan pecahan adalah $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, dan masih banyak yang lain. Contoh bilangan bulat adalah 1, -1, 2, -2, 3, -3, dan masih banyak yang lain

P: kenapa Anda mengatakan bilangan pecahan bagian dari bilangan bulat?

S: karena kalau kita punya 1 satuan (sambil memegang pensil), maka $\frac{1}{2}$ merupakan bagian dari satu ini, yakni separoh dari pensil ini

Berdasarkan ringkasan wawancara mendalam dan diskusi investigatif tersebut, nampak bahwa ada **kesalahan** dalam konstruksi himpunan bagian. Subjek mengonstruksi bilangan pecahan dari bilangan bulat. Misalkan ada satu balok yang merepresentasikan



bilangan 1 (satuan), maka bilangan $\frac{1}{2}$ bisa direpresentasikan sebagai balok yang panjangnya $\frac{1}{2}$ dari satuan. Berdasarkan fakta ini dikonstruksi konsep $\frac{1}{2}$ bagian dari 1. Begitupula $\frac{1}{4}$ direpresentasikan sebagai $\frac{1}{4}$ bagian dari 1. Karena $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ adalah bilangan pecahan dan

merupakan bagian dari 1 (sebagai bilangan bulat), maka akhirnya Subjek menyimpulkan bahwa pecahan bagian dari bilangan bulat. Konstruksi ini nampak masuk akal, meskipun sebenarnya salah. Peneliti mencoba menelusuri lebih lanjut dengan pecahan yang lebih besar dan melakukan dialog investigatif seperti berikut.

P: Bagaimana kalau $2\frac{1}{3}$ dan $4\frac{1}{2}$?

S: sama, $2\frac{1}{3}$ terletak diantara 2 dan 3. Kalau kita punya 3 pensil begini (sambil memegang pensil), maka $2\frac{1}{3}$ juga bagian dari 3 pensil. Kalau $4\frac{1}{2}$ bagian dari 5 pensil ini (sambil memegang pensil).

P: oh begitu. Apakah fakta tersebut Anda gunakan untuk menyimpulkan bahwa bilangan pecahan bagian dari bilangan bulat?

S: Iya.

Dialog tersebut menunjukkan subjek yakin bahwa bilangan pecahan $2\frac{1}{3}$ merupakan bagian dari bilangan bulat 3, karena bilangan pecahan dikonstruksi dari objek pecahan bagian dari objek utuh (sebagai bilangan bulat). Makna “bagian” **bukan** sebagai himpunan bagian, tetapi sebagai “bagian dari keseluruhan”, di mana “keseluruhannya” sebagai sesuatu yang utuh (diinterpretasikan sebagai bilangan bulat). Begitupula bilangan pecahan $4\frac{1}{2}$ merupakan

bagian dari bilangan bulat 5, karena subjek menginterpretasi $4\frac{1}{2}$ pensil bagian dari 5 pensil. Dalam hal ini, ada kesalahan subjek dalam

mengonstruksi konsep matematika, di mana terjadi interferensi berpikir konsep himpunan tercampur dengan konstruksi pecahan (bagian terhadap keseluruhan). Kesalahan konstruksi konsep perlu mendapat perhatian dari aspek berpikir subjek, karena belajar matematika adalah mengonstruksi konsep matematika (Kobiela, M. & Lehrer, R., 2015; Subanji & Nusantara, T., 2016) dan pengembangan berpikir siswa (Leatham, K.R., Peterson, B.E., Stockero, S.L., Zoest, L., R.V., 2015; Subanji & Supratman, 2015). Berkaitan dengan hal tersebut, peneliti menelusuri lebih lanjut proses berpikir subjek dalam mengonstruksi bilangan pecahan dikaitkan dengan bilangan bulat melalui wawancara investigatif sebagai berikut.

P: kalau saya memiliki 2 pensil, apakah 2 pensil bagian dari $2\frac{1}{3}$?

S: Iya

P: Apakah 2 bilangan bulat? Apakah $2\frac{1}{3}$ bilangan pecahan?

S: Iya

P: Apakah bisa disimpulkan bilangan bulat bagian dari rasional?

S: Oh iya (berpikir lama), bagaimana ya? Tapi biasanya pecahan itu di antara bilangan bulat

P: Ok. Kembali ke contohmu tadi. Kalau kita memiliki pensil $4\frac{1}{2}$ apakah 1 pensil, 2 pensil, dan 3 pensil merupakan bagian dari $4\frac{1}{2}$ pensil?

S: Iya. Tapi.... (berpikir lama). Iya masuk akal. Berarti cara mikir saya salah selama ini.

Dari wawancara investigatif tersebut, nampak bahwa subjek mengalami "benturan berpikir" (sering disebut *cognitive conflict*). Subjek merasakan ada masalah dalam proses konstruksi yang menghasilkan simpulan "bilangan rasional sebagai bagian dari bilangan bulat", bahwa konstruksi tersebut bertentangan dengan fakta lain yang menyimpulkan bilangan bulat bagian dari pecahan. Adanya *cognitive conflict* sebagai awal yang baik untuk memperbaiki kesalahan matematis subjek. Hal ini sesuai pendapat Tall (1977) yang menekankan pentingnya *cognitive conflict* dalam pembelajaran matematika. , pendapat (Kieslich, P.J. & Hilbig, B.E., 2014; Kang, H., Scharmann, L.C., Kang, S., Noh, T., 2010; Toka, Y., & Aşkar, P., 2002; Limo'n, Margarita, 2001) yang menekankan bahwa *cognitive conflict* dapat digunakan untuk mengubah dan mengembangkan konseptual matematis serta pendapat dari Rolka dkk. (2007) yang menyatakan bahwa *cognitive conflict* dapat mengubah keyakinan dalam belajar matematika.

Pendekatan konstruksi bilangan pecahan dari "bagian terhadap keseluruhan" menghambat subjek untuk mengonstruksi himpunan bagian. Subanji (2016) menjelaskan fenomena ini sebagai proses interferensi berpikir. Subjek sebenarnya sudah belajar tentang konsep bilangan pecahan secara formal, namun pada saat mengonstruksi himpunan bagian yang digunakan bukan konsep formal tersebut. Hal ini terungkap dari proses wawancara berikut.

P: Pernahkan Anda belajar konsep bilangan pecahan?

S: Pernah

P: Apa bilangan pecahan itu?

S: Bilangan yang bisa ditulis sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a , b bilangan bulat dan $b \neq 0$.

P: Apakah 2 bilangan pecahan?

S: Bukan, 2 bilangan bulat

P: Kalau $\frac{6}{3}$ apakah bilangan pecahan?

S: Ehm.. (berpikir agak lama). Kalau mengikuti pengertian bilangan pecahan, $a=6$ dan $b=3$. Iya $\frac{6}{3}$ merupakan bilangan pecahan

P: bagaimana dengan 2, apakah bilangan pecahan?

S: Mestinya Iya, karena $2 = \frac{6}{3}$

P: Apakah setiap bilangan bulat bisa dinyatakan sebagai bilangan pecahan?

S: kalau berdasarkan contoh tadi, Iya

P: Sekarang, apa yang dapat kamu simpulkan? Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan pecahan atau sebaliknya "himpunan blangan pecahan bagian dari himpunan bilangan bulat?

S: Himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan pecahan

Berdasarkan dialog tersebut nampak bahwa subjek sudah memiliki pengetahuan tentang konsep bilangan pecahan secara formal dan memiliki pengetahuan tentang himpunan bagian. Dominasi oleh proses konstruksi "pecahan sebagai bagian dari yang utuh" mengakibatkan konsep himpunan terinterferensi oleh konstruksi tersebut dan mengakibatkan kesalahan konsep. Definisi formal dari bilangan pecahan tertutup oleh konstruksi "pecahan sebagai bagian dari sesuatu yang utuh". Dengan menggunakan

scaffolding “merepresentasikan bilangan bulat sebagai pecahan”, maka subjek langsung mampu mengubah struktur berpikirnya dan menghasilkan konsep yang benar. Hal ini menunjukkan pentingnya peranan scaffolding untuk memperbaiki kesalahan konstruksi konsep matematika, seperti yang diungkap oleh beberapa peneliti (Anghileri, 2006; Bakker, dkk, 2015; Bature, 2015) dan scaffolding dapat mendorong subjek untuk mencapai zona proximal development (Peretz, 2006; Jbeili, 2012).

Selanjutnya kasus kesalahan konstruksi “konsep hubungan” antara bilangan pecahan dan bilangan bulat dikaji menggunakan teori pemrosesan informasi dan teori APOS (termasuk abstraksi reflektif). Komponen utama dalam pemrosesan informasi meliputi: sensory memory, short-term memory, dan long-term memory. Struktur mental di APOS meliputi: aksi, proses, objek, dan skema. Mekanisme konstruksi konsep matematis meliputi: interiorisasi, koordinasi, dan encapsulasi.

Pertama, berdasarkan **teori pemrosesan informasi**. Pada saat subjek menghadapi **stimulus** untuk memilih satu dari dua pernyataan yang diberikan, subjek menangkap informasi bilangan pecahan dan bilangan bulat melalui **sensory memory**. Informasi yang masuk diolah di short-term memory. Untuk memecahkan masalah tersebut, subjek merasakan belum cukup dengan informasi yang ada, karena itu subjek melakukan **retrieval** dengan memanggil pengetahuan lama di **long-term memory**. Pengetahuan yang dipanggil di long-term memory adalah konstruksi bilangan pecahan. Subjek menjelaskan bahwa dalam pembentukannya, bilangan pecahan diperoleh dari bilangan bulat, bahwa *setengah*, *sepertiga*, *seperempat*, *dua pertiga* merupakan bagian dari *satu* satuan. Pada kasus lain *dua sepertiga* bagian dari *tiga* satuan, *empat setengah* bagian dari *lima*. Dari kasus-kasus tersebut subjek memunculkan respon dengan menyimpulkan bahwa himpunan bilangan pecahan bagian dari himpunan bilangan bulat. Hal ini memperkuat pengetahuan yang ada di long-term memory.

Ketika “stimulus baru” dimunculkan oleh peneliti bahwa dengan prosedur yang sama, *dua* bagian dari *dua sepertiga* dan *empat* bagian dari *empat setengah*. Informasi tersebut masuk melalui **sensory memory** dan diolah di **short-term memory**. Proses di short-term memory cukup lama yang ditandai dengan berpikir yang menyimpulkan bahwa mestinya bisa disebut bilangan bulat bagian dari pecahan. Dengan kesimpulan yang berbeda ini membuat berpikir subjek menjadi “kacau”. Dalam kondisi seperti ini, peneliti memberikan stimulus baru dengan mempertanyakan kepada subjek tentang definisi formal bilangan pecahan. Subjek mencari pengertian bilangan pecahan di long-term memory dan ditemukan bilangan pecahan sebagai $\frac{a}{b}$, dengan a, b bilangan bulat dan $b \neq 0$. Dalam memahami definisi tersebut, subjek juga masih mengalami masalah bahwa 2 bukan bilangan pecahan tetapi merupakan bilangan bulat. Ketika subjek diberi stimulus baru *enam pertiga* untuk dikaitkan dengan definisi bilangan pecahan, dia menyatakan bahwa *enam pertiga* merupakan bilangan pecahan dan karena *enam pertiga* sama dengan *dua*, maka dia bisa mengonstruksi bilangan bulat merupakan bilangan pecahan. Akhirnya subjek bisa menyimpulkan bahwa himpunan bilangan bulat bagian dari bilangan rasional.

Kedua, analisis berdasarkan struktur mental dan mekanisme konstruksi pengetahuan matematis. Ketika subjek membaca masalah, ada struktur mental “**action**” yang ditandai oleh adanya respon terhadap masalah. Mekanisme konstruksi pengetahuan

yang terjadi adalah **interiorization**, di mana subjek memahami komponen-komponen yang ada di masalah, yakni bilangan rasional, bilangan bulat, dan himpunan bagian. Komponen-komponen yang sudah diinteriorisasi tersebut selanjutnya diproses dalam struktur mental "**processes**" dengan mekanisme konstruksi pengetahuan "**coordination**". Bilangan rasional dieksplorasi dan dihubungkan dengan bilangan bulat. Dalam hal ini ada kesalahan konstruksi "bilangan rasional bagian dari bilangan bulat". Dengan intervensi terbatas dari peneliti (melalui pemberian scaffolding), subjek melakukan proses perbaikan konstruksi yang cukup panjang, termasuk memanfaatkan pengetahuan lamanya dalam mekanisme **coordination**. Akhirnya subjek berhasil memperbaiki struktur kognitifnya (yang salah) dan berhasil mengonstruksi "himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional" sebagai bentuk dari struktur mental **encapsulation**. Pembentukan konsep tersebut berlanjut pada struktur mental **schema** dengan meletakkan konsep tersebut di dalam struktur bilangan.

Dari kasus pengonstruksian konsep himpunan bilangan bulat bagian dari himpunan bilangan rasional tersebut, nampak bahwa perkembangan kognitif seseorang senantiasa berlangsung dalam belajar matematika. Karena itu penelitian terkait dengan proses berpikir selalu diperlukan dalam pendidikan matematika, terutama untuk mengkaji: (1) bagaimana proses berpikir dalam belajar matematika, sehingga bisa digunakan untuk merancang pembelajaran yang sesuai; (2) bagaimana kesalahan konstruksi konsep matematis terbentuk, sehingga bisa dilakukan perbaikan melalui intervensi/scaffolding yang efektif; (3) bagaimana interaksi berpikir terjadi, sehingga bisa digunakan sebagai bahan untuk membentuk kelompok belajar yang efektif; dan (4) bagaimana lintasan berpikir terjadi, sehingga bisa digunakan untuk membentuk berpikir matematis, berpikir kreatif, berpikir kritis, dan berpikir analitis.

SIMPULAN

Dari analisis dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa: (1) kajian proses berpikir sangat penting dilakukan di pendidikan matematika karena sesuai dengan karakteristik matematika yang memiliki objek kajian abstrak, (2) analisis proses konstruksi pengetahuan matematis sangat penting untuk dilakukan terutama untuk mengkaji proses berpikir dalam pembentukan konsep matematis, (3) Berpikir matematis dalam mengonstruksi konsep matematis jika dianalisis melalui teori pemrosesan informasi prosesnya mencakup: *sensory memory*, *short-term memory*, dan *long-term memory*, (4) konstruksi konsep matematis jika ditinjau dari struktur mental bisa berbentuk: action, processes, object. schema dan jika ditinjau dari mekanisme pembentukan pengetahuan matematis berupa proses: *interiorization*, *coordination*, dan *encapsulation*.

DAFTAR RUJUKAN

- Anghileri, Julia, 2006. Scaffolding Practices that Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education* (2006) 9: 33–52
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, S.R., Trigueros, M., Weller, K., 2014. *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York. Springer.
- Bakker, A., Smit, J., & Wegerif, R. (2015). Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review. *ZDM Mathematics Education* (2015) 47:1047–1065

- Bature, I., J., and Jibrin, A., G. (2015). The Perception of Preservice Mathematics Teachers on the Role of Scaffolding in Achieving Quality Mathematics Classroom Instruction. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. Volume 3, Number 4, October 2015, Page 275-287
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., Kim, J., 2015. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 3, 39-87
- Jbeili, Ibrahim (2012). The Effect of Cooperative Learning with Metacognitive Scaffolding on Mathematics Conceptual Understanding and Procedural Fluency. *International Journal for Research in Education (IJRE)* No. 32, 2012
- Kang, H., Scharmann, L.C., Kang, S., Noh, T., 2010. Cognitive conflict and situational interest as factors influencing conceptual change. *International Journal of Environmental & Science Education*. Vol. 5, No. 4, pp. 383-405
- Kieslich, P.J. & Hilbig, B.E., 2014. Cognitive conflict in social dilemmas: An analysis of response dynamics. *Judgment and Decision Making*, Vol. 9, No. 6, November 2014, pp. 510-522.
- Kobiela, M. & Lehrer, R. (2015). The Codevelopment of Mathematical Concepts and the Practice of Defining. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 4, 423-454
- Leatham, K.R., Peterson, B.E., Stockero, S.L., Zoest, L., R.V., 2015. Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 1, 88-124
- Limo'n, Margarita, 2001. On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction* 11 (2001) pp. 357-380
- Mason, J., L.Burton, K.Stacey, 2010. Thinking Mathematically 2nd edition. London: Pearson Education Ltd.
- Peretz, D. 2006. Enhancing Reasoning Attitudes Of Prospective Elementary School Mathematics Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education* (2006) 9:381-400
- Rolka, K., Rösken, B., and Liljedahl, P., 2007. The Role of Cognitive Conflict In Belief Changes. *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 121-128. Seoul: PME
- Soedjadi, 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia, Konstatasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan*. Dirjen Dikti. Depdiknas. Jakarta
- Subanji & Supratman, 2015. The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. *J. Korean Soc. Math. Educ., Ser. D, Res. Math. Educ.* Vol. 19, No. 1, pp. 61-79
- Subanji & Nusantara, T., 2016. Thinking Process of Pseudo Construction in Mathematics Concepts. *International Education Studies*; Vol. 9, No. 2; 2016, pp. 17 - 31
- Subanji, Isnandar, Santoso, A., Sutadji, E., Sutopo, Hidayanto, E., Suharyadi, 2014. *TEQIP - Model Pengembangan Keprofesionalan Guru Kreatif, Inovatif, Bermakna, dan Berkarakter Terintegrasi dalam Lesson Study*. UM Press. Malang
- Subanji, 2016. *Teori Defragmentasi Struktur Berpikir dalam Mengonstruksi dan Memecahkan Masalah Matematika*. UM Press. Malang
- Tall, D. (1977). Cognitive Conflict and the Learning of Mathematics. Paper presented at the First Conference of *The International Group for the Psychology of Mathematics Education* at Utrecht, Netherlands, summer 1977, pp. 1-12
- Tall, 2009. The Development Of Mathematical Thinking: Problem-Solving And Proof
- Toka, Y., Aşkar, P., 2002. The Effect of Cognitive Conflict and Conceptual Change Text on Students' Achievement Related To First Degree Equations with One Unknown. *Hacettepe Universitesi Egitim Fakultesi Dergisi* 23, pp. 211-217

PENGEMBANGAN BAHAN AJAR MATERI KPK DAN FPB BERBASIS PENDIDIKAN MATEMATIKA REALISTIK (PMR) BERBANTUAN PUZZLE

Pipit Pudji Astutik

Sekolah Dasar Negeri Tunjungsekar 3 Kota Malang

pipitpudjia@gmail.com

Abstrak: Penelitian ini bertujuan menghasilkan bahan ajar materi KPK dan FPB berbasis PMR berbantuan *puzzle* yang valid, praktis, dan efektif untuk siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3. Model pengembangan dalam penelitian ini menggunakan model 4D, tanpa fase diseminasi. Kevalidan diperiksa oleh tiga validator, kepraktisan dan keefektifan diperiksa oleh dua observer dan siswa sebagai pengguna pada saat uji coba lapangan. Instrumen penelitian meliputi (1) angket validasi, (2) lembar observasi, (3) pedoman wawancara, dan (4) tes. Hasil validasi dari tiga validator menunjukkan bahwa bahan ajar berbasis PMR berbantuan *puzzle* memenuhi kriteria valid. Hasil uji coba lapangan menunjukkan bahwa bahan ajar materi KPK dan FPB berbasis PMR berbantuan *puzzle* telah memenuhi kriteria praktis dan efektif.

Kata Kunci: bahan ajar, pendidikan matematika realistik, *puzzle*.

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, secara sadar atau tidak banyak ditemukan penggunaan konsep matematika. Selain aspek aplikasi matematika pada masa sekarang, perkembangan matematika juga sebenarnya disebabkan adanya kebutuhan manusia (Flegg dalam Wijaya, 2012:6). Salah satu pendekatan pembelajaran yang menekankan pada kebermaknaan ilmu pengetahuan adalah Pendidikan Matematika Realistik (Freudenthal dalam Wijaya, 2012:3). Dalam mempelajari matematika, siswa perlu menghubungkan suatu konsep matematika dengan pengetahuan yang sudah mereka miliki (Adam dan Hamm dalam Wijaya, 2012:5).

Hudoyo (1990:79) mengemukakan bahwa kondisi pembelajaran matematika di Indonesia sampai saat ini masih memerlukan perbaikan dan penyempurnaan. Hal ini disebabkan masih banyak permasalahan yang muncul berkaitan dengan pembelajaran matematika di antaranya kurikulum, model pembelajaran, kualitas guru, serta sekumpulan sumber belajar yang memungkinkan guru dan siswa melakukan kegiatan pembelajaran (Asra, 2004).

Hasil observasi yang dilakukan peneliti pada siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang pada tanggal 10 Oktober 2012, menunjukkan bahwa pembelajaran matematika pada materi Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) di kelas dilakukan dengan metode ceramah tanpa media yaitu guru menerangkan cara mencari faktorisasi prima suatu bilangan dengan menggunakan pohon faktor. Selain metode ceramah dan tidak adanya media, hasil observasi juga menunjukkan bahwa buku teks yang digunakan adalah buku teks yang belum menyajikan masalah-masalah kontekstual. Sajian materi dan soal-soal dalam buku teks yang digunakan mayoritas hanya soal-soal biasa dan bukan masalah yang realistik yang dialami siswa dalam kehidupan sehari-hari. Hasil wawancara dengan guru kelas IV SDN Tunjungsekar 3 yang disertai dengan data daftar nilai siswa, diketahui bahwa 25 siswa dari keseluruhan 32 siswa (78%) siswa kelas IV mengalami kesulitan dalam menyelesaikan KPK dan FPB. Data yang diperoleh menunjukkan nilai formatif pada materi KPK dan FPB yang belum

memenuhi harapan, yaitu 78% siswa memperoleh nilai di bawah kriteria ketuntasan minimum (KKM) yaitu 64.

Berdasarkan uraian di atas, dapat dinyatakan bahwa kesulitan siswa dalam mempelajari KPK dan FPB disebabkan (1) siswa kurang memahami materi yang terdapat pada bahan ajar, sehingga sulit mengulang kembali konsep yang diajarkan, (2) pembelajaran bersifat konvensional, (3) aplikasi bentuk soal yang diberikan guru tidak kontekstual, (4) belum adanya bahan ajar yang memfasilitasi siswa untuk belajar aktif dan mengkonstruksi pengetahuan sendiri dalam pembelajaran matematika, dan (5) belum ada media yang konkret untuk membantu siswa memahami materi KPK dan FPB.

Sehubungan dengan pengembangan bahan ajar, Fadjar (2010) mengungkapkan bahwa pengembangan bahan ajar dalam bentuk modul dapat memberikan kontribusi yang besar terhadap proses pembelajaran karena dapat mewujudkan pembelajaran yang berkualitas. Penerapan modul dapat mengkondisikan kegiatan pembelajaran lebih terencana dengan baik, mandiri, tuntas dengan hasil yang jelas (BNSP, 2006). Pembelajaran dengan bantuan modul telah terbukti dapat meningkatkan kualitas proses dan hasil belajar. Nugroho (2008) dalam penelitiannya mengungkapkan bahwa pembelajaran dengan modul telah memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan dan perolehan hasil belajar siswa.

Berdasarkan hasil observasi diketahui bahwa pendekatan pembelajaran matematika yang selama ini digunakan belum optimal. Oleh karena itu dibutuhkan suatu pendekatan pembelajaran matematika yang mampu meningkatkan pemahaman siswa terhadap KPK dan FPB. Pendekatan yang memungkinkan siswa berani mengemukakan pendapat, siswa belajar matematika dengan penalaran, matematika yang dikemas secara kontekstual, siswa aktif dalam kegiatan pembelajaran, penyajian materi sesuai dengan perkembangan kognitif siswa, ada interaksi antara siswa dan siswa dan juga siswa dengan guru, dan materi yang diberikan berkesinambungan.

Pendidikan Matematika Realistik (PMR) tampaknya sesuai dengan pembelajaran matematika kontekstual yang diharapkan. Suatu pengetahuan akan menjadi bermakna bagi siswa jika proses pembelajaran dilaksanakan dalam suatu konteks atau pembelajaran menggunakan permasalahan realistik. Dalam PMR, permasalahan realistik digunakan sebagai fondasi dalam membangun konsep matematika atau disebut juga sebagai sumber untuk pembelajaran (Wijaya, 2012:21). PMR tidak dimulai dari definisi, teorema, atau sifat-sifat yang selanjutnya diikuti dengan contoh-contoh seperti pembelajaran konvensional, namun sifat, definisi, dan teorema tersebut diharapkan dapat ditemukan sendiri oleh siswa (Hobri, 2008:34).

Selain bahan ajar dan pendekatan yang perlu diperhatikan lagi adalah adanya media. Pengelolaan alat bantu pembelajaran berupa media sangat dibutuhkan untuk membantu proses belajar mengajar, mempermudah anak memahami suatu materi, dan menurunkan tingkat keabstrakan suatu materi. Media yang tepat untuk pengembangan bahan ajar berbasis matematika realistik ini adalah media *puzzle*. Penggunaan bahan ajar yang tidak kontekstual mengakibatkan siswa tidak memahami konsep-konsep matematika dengan benar. Untuk itu, perlu dikembangkan bahan ajar yang mampu mempermudah pemahaman siswa terhadap konsep matematika yang baik dan benar, terutama bahan ajar yang berupa modul. Dengan modul siswa mampu belajar secara

mandiri dan membangun pengetahuannya sendiri untuk menemukan konsep-konsep matematika dengan baik dan benar.

Bahan ajar adalah materi pembelajaran, secara garis besar terdiri dari pengetahuan, keterampilan dan sikap yang harus dipelajari oleh pebelajar dalam rangka mencapai standar kompetensi yang telah ditentukan (Depdiknas, 2006). Pendidikan Matematika Realistik (PMR) adalah suatu pendekatan pembelajaran matematika yang harus selalu menggunakan masalah sehari-hari (Wijaya, 2012:20). Penggunaan kata "*realistic*" sebenarnya berasal dari bahasa Belanda "*zich raliseren*" yang berarti "untuk dibayangkan" atau "*to imange*" (Van den Heuvel-Panhuizen dalam Wijaya, 2012:20). Menurut Van den Heuvel-Panhuizen, penggunaan kata "*realistic*" tersebut tidak sekedar menunjukkan adanya suatu koneksi dengan dunia nyata (*real-world*) tetapi lebih mengacu pada fokus PMR dalam menempatkan penekanan penggunaan suatu situasi yang bisa dibayangkan (*imagineable*) oleh siswa.

PMR juga merupakan reaksi terhadap pendekatan strukturalist pada *new math* (matematika modern) yang menyebar dari Amerika ke berbagai negara lainnya. PMR atau yang dikenal dengan "*Realistic Mathematic Educations (RME)*" pertama kali diperkenalkan sejak tahun 1971 oleh Institut Freudenthal. Setelah lama diujicobakan dan diimplementasikan di Belanda, PMR telah membawa perubahan yang signifikan pada pemahaman siswa terhadap matematika, yakni telah berhasil merangsang penalaran dan kegiatan berpikir siswa (Beckker & Selter dalam Yuwono, 2001b:1). Beaton (1996) merujuk pada laporan yang dipublikasikan oleh TIMSS (*Third International Mathematics and Science Study*), menyatakan bahwa para siswa di Belanda memperoleh hasil yang memuaskan baik keterampilan komputasi maupun kemampuan pemecahan masalah.

PMR menitikberatkan pada masalah-masalah kontekstual. Pembelajaran tidak lagi bersifat *teacher oriented* (berpusat pada guru) melainkan *children oriented* (berpusat pada siswa). Guru bertindak sebagai fasilitator sedangkan siswa aktif mengkomunikasikan ide-ide yang dimiliki. Guru membantu membandingkan ide-ide siswanya untuk mengambil keputusan tentang ide terbaik mereka. Treffers (dalam Wijaya, 2011) mengemukakan bahwa aktivitas pokok yang dilakukan dalam PMR meliputi (1) menemukan masalah-masalah kontekstual (*looking for the problems*), (2) memecahkan masalah (*solving problems*), dan (3) mengorganisir bahan ajar (*organizing a subject matter*).

Dalam merancang pembelajaran matematika realistik (PMR), Gravemeijer (dalam Siswoyo, 2011) menyatakan ada tiga prinsip utama yang harus diperhatikan (1) penemuan terbimbing melalui matematisasi progresif (*guided reinvention through progressive mathematizing*), (2) fenomenologi didaktis (*didactical phenomenology*), (3) model pengembangan diri (*self development model*).

Berdasarkan ketiga prinsip yang terurai sebelumnya, Trefers (dalam Wijaya, 2012:21) merumuskan karakteristik PMR sebagai berikut (1) penggunaan konteks, (2) penggunaan model untuk matematisasi progresif, (3) pemanfaatan hasil konstruksi siswa, (4) interaktivitas, dan (5) keterkaitan.

Menurut Siswoyo (2011) langkah-langkah pembelajaran matematika berbasis PMR sebagai berikut (1) memahami masalah kontekstual, (2) mendeskripsikan dan menyelesaikan masalah kontekstual, (3) membandingkan dan mendiskusikan jawaban,

dan (4) menyimpulkan. Lebih lanjut, Patmonodewo (dalam Misbach, 2010) mengungkapkan kata *puzzle* berasal dari bahasa Inggris yang berarti teka-teki atau bongkar pasang. Media *puzzle* merupakan media sederhana yang dimainkan dengan bongkar pasang. Berdasarkan pengertian tentang media *puzzle*, maka dapat disimpulkan bahwa media *puzzle* merupakan alat permainan edukatif yang dapat merangsang kemampuan matematika anak, yang dimainkan dengan cara membongkar pasang kepingan *puzzle* berdasarkan pasangannya.

Bahan ajar dalam penelitian ini adalah modul yang berisi materi, metode, kegiatan siswa, dan evaluasi yang dirancang secara sistematis dan menarik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan, serta disesuaikan dengan PMR yang digunakan. Bahan ajar siswa digunakan sebagai petunjuk mengajar yang efektif bagi pendidik, serta menjadi bahan untuk berlatih bagi peserta didik dalam melakukan penilaian sendiri (*self assessment*) dengan bimbingan atau tanpa bimbingan guru (Fadjar, 2010:16). Pengorganisasian materi di dalam modul lebih realistik, bahasa yang digunakan komunikatif sehingga relevan dengan tingkat perkembangan siswa sekolah dasar.

Berdasarkan prinsip dan karakteristik PMR, maka bahan ajar dalam penelitian ini memiliki karakteristik sebagai berikut (a) topik-topik yang akan diajarkan, permasalahan di dalam modul diupayakan berasal dari fenomena/kehidupan sehari-hari siswa (*realistic problem*), (b) setiap siswa diberi kesempatan yang sama untuk menyelesaikan masalah realistik yang mempunyai berbagai kemungkinan penyelesaian, (c) pengorganisasian siswa di dalam modul teks memungkinkan siswa berinteraksi dengan teman sesama, berdiskusi dan membandingkan jawaban, dan (d) siswa diberi kesempatan menyimpulkan suatu rumusan konsep/prinsip dari topik yang dipelajari berdasarkan hasil diskusi kelompok.

KPK dan FPB adalah salah satu konsep dalam matematika yang dipelajari siswa pada tingkat Sekolah Dasar (SD). Menurut kurikulum tingkat satuan pendidikan (KTSP) tahun 2006, KPK dan FPB termasuk dalam pokok bahasan bilangan yang dipelajari di kelas IV semester 1. Mempelajari KPK dan FPB bukanlah kegiatan memindahkan pengetahuan dari guru ke siswa melainkan suatu kegiatan yang memungkinkan siswa membentuk sendiri pengetahuannya.

Pada pembelajaran KPK dan FPB dengan pembelajaran berbasis PMR, pembelajaran dimulai dengan pemecahan masalah yang berhubungan dengan kehidupan sehari-hari siswa atau sesuai dengan konteks yang ada dalam pikiran siswa. Proses pemecahan masalah yang diberikan memerlukan aktivitas fisik berupa media *puzzle*. Selain aktivitas fisik masalah yang diberikan juga memerlukan aktivitas mental yang tinggi untuk sampai memahami konsep yang diinginkan. Dengan demikian, untuk memahami konsep KPK dan FPB, siswa dilibatkan aktif.

Hasil penelitian yang dilakukan di Bengkulu oleh Haji (2008) dengan judul “Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Melalui Pendekatan Matematika Realistik di Kelas VII SMPN 1 Kotamadya Bengkulu”. Hasil penelitian menunjukkan adanya peningkatan kemampuan pemecahan masalah dan keaktifan siswa dalam belajar matematika. Pada siklus 1 kemampuan pemecahan masalah yang dapat dicapai adalah kemampuan membuat gambar dan tabel dari suatu masalah meningkat sebesar 73%. Selain itu, adanya peningkatan kemampuan siswa dalam mendeskripsikan permasalahan

dalam sebuah goresan, menyusun hipotesis dan menyimpulkan sebuah permasalahan dibandingkan pembelajaran secara konvensional.

Hasil penelitian lain yang relevan dengan penelitian ini juga pernah dilakukan oleh Kadarwati (2004) yang berjudul "Pendekatan Realistik Matematika pada Pembelajaran Perkalian dan Pembagian Bilangan Cacah bagi Siswa Kelas II SDN Sidorejo Kota Salatiga". Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa melalui pembelajaran realistik dapat membantu meningkatkan pemahaman konsep perkalian dan pembagian siswa. Melalui pendekatan realistik ini siswa dapat mengaplikasikan konsep perkalian dan pembagian dalam kehidupan sehari-hari.

Penelitian selanjutnya dilakukan oleh Royani (2008) dengan judul "Pendekatan Realistik dalam Soal Cerita pada Buku Matematika Sekolah Dasar" yang menghasilkan penemuan bahwa soal-soal cerita yang realistik lebih banyak untuk membantu pemahaman siswa". Hasil penelitian tersebut membuktikan secara empiris tentang prospek pengembangan dan implementasi PMR di Indonesia. Perbedaan penelitian ini dengan penelitian sebelumnya terletak pada jenis penelitian dan variabel yang diamati. Penelitian terdahulu banyak mengkaji tentang penerapan pendekatan PMR dalam pembelajaran matematika di sekolah.

Tujuan penelitian ini menghasilkan bahan ajar materi KPK dan FPB berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR) Berbantuan *Puzzle* yang valid, praktis, dan efektif untuk siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3.

Spesifikasi secara teknis, (1) bahan ajar ditulis dengan bahasa yang komunikatif, lugas, dan jelas untuk mendukung penyajian materi yang mudah dipahami, (2) bahan ajar berbentuk modul dengan mengikuti format modul, (3) bahan ajar disertai warna, gambar maupun ilustrasi yang ditata sesuai dengan karakteristik siswa Sekolah Dasar, dan (4) bahan ajar ditulis dengan ukuran dan jenis huruf yang mudah dibaca. Sedangkan spesifikasi secara substansi (1) materi KPK dan FPB dalam bahan ajar disajikan dengan urutan yang sistematis supaya mudah dipahami, yakni dengan cara materi diorganisasikan isinya sesuai dengan tingkat kompleksitasnya masing-masing yang didasarkan pada hasil analisis pembelajaran, (2) bahan ajar menyajikan suatu masalah dalam kehidupan nyata disertai contoh-contoh, (3) bahan ajar yang akan dikembangkan memuat komponen-komponen antara lain peta konsep, peta kompetensi, tujuan pembelajaran, uraian materi, rangkuman, latihan, umpan balik, dan tindak lanjut. Spesifikasi produk *puzzle* antara lain (1) *puzzle* terbuat dari kertas karton yang berupa *puzzle* bongkar pasang yang terdiri dari simbol bilangan, (2) *puzzle* terdiri dari bilangan-bilangan dengan *font* yang sesuai dengan tingkat siswa Sekolah Dasar.

Berdasarkan uraian tersebut di atas, maka dipandang perlu dilakukan penelitian tentang "Pengembangan Bahan Ajar Materi KPK dan FPB Berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR) Berbantuan *Puzzle*", dengan harapan dapat membantu mempermudah pemahaman siswa terutama pada materi KPK dan FPB.

Keterbatasan pengembangan bahan ajar ini adalah (1) bahan ajar yang dikembangkan hanya sampai pada tahap uji kelayakan, (2) produk yang dihasilkan terbatas pada bahan ajar cetak berupa modul sesuai dengan kurikulum yang sedang berlaku yaitu Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP), (3) materi yang disajikan dalam bahan ajar hanya terbatas pada materi KPK dan FPB untuk siswa Kelas IV

semester 1 SDN Tunjungsekar 3 Kecamatan Lowokwaru Kota Malang, dan (4) uji kelayakan bahan ajar yang dikembangkan hanya dilakukan pada uji kelompok kecil.

METODE

Model Penelitian Pengembangan

Model pengembangan yang digunakan dalam penelitian ini memodifikasi model 4D (*Four D model*) oleh Thiagarajan dan Sammel (dalam Hobri, 2010:28). Penggunaan model ini didasari atas pertimbangan bahwa model ini digunakan secara prosedural sesuai dengan langkah-langkah yang sistematis. Model 4D ini dikembangkan dengan mempertimbangkan beberapa alasan, yaitu (a) model ini disusun secara terprogram dengan urutan kegiatan yang sistematis dalam upaya penyelesaian masalah belajar yang berkaitan dengan sumber belajar yang sesuai dengan kebutuhan dan karakteristik pebelajar, (b) pemilihan model pengembangan dengan pertimbangan bahwa model Thiagarajan pada bukunya "*Instructional For Training Teacher of Expectional Children*" membahas khusus bagaimana mengembangkan bahan ajar dan bukan rancangan pengajarannya.

Pengembangan dengan model ini terdiri dari empat tahap, yaitu tahap pendefinisian (*define*), perancangan (*design*), pengembangan (*develop*), dan penyebaran (*desseminate*). Tahap pertama sampai ketiga yaitu pendefinisian, perancangan, dan pengembangan sering disebut sebagai bagian penyebaran. Dengan demikian, untuk kepentingan penelitian, ada beberapa penyelesaian yang perlu dilakukan, sehingga proses pengembangan lebih sesuai dengan fokus penelitian.

Prosedur pengembangan bahan ajar matematika dengan media *puzzle* berbasis PMR memodifikasi model 4D dengan beberapa penyesuaian sehingga proses pengembangan yang dilakukan terdiri dari tiga tahap, yaitu tahap pendefinisian (*define*), perancangan (*design*), pengembangan (*develop*). Tahap penyebaran (*desseminate*) tidak dilakukan, karena keterbatasan waktu dan membutuhkan eksperimen lebih lanjut (Miswanto, 2012: 31).

Tahap Pendefinisian (define)

Tujuan tahap ini adalah menetapkan dan mendefinisikan syarat-syarat pembelajaran. Tahap pendefinisian terdiri dari (1) analisis akhir terdepan (*front-end analysis*), (2) analisis siswa (*learner analysis*), (3) analisis konsep (*concept analysis*), (4) analisis tugas (*task analysis*), dan (5) spesifikasi Indikator Pembelajaran (*Specifying Instructional Objective*).

Tahap Perancangan (design)

Tujuan dari tahap ini adalah untuk menyiapkan *prototipe* bahan ajar matematika dengan media *puzzle* yang ditujukan untuk siswa kelas IV Sekolah Dasar SDN Tunjungsekar 3 pada materi KPK dan FPB berbasis Pendidikan Matematika Reaslitik (PMR), dimana materi ini sangat dekat dengan lingkungan kehidupan sehari-hari siswa. Produk yang dikembangkan harus mampu menunjukkan model pembelajaran yang digunakan yaitu pembelajaran berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR). Kesesuaian dengan model pembelajaran suatu bahan ajar dilihat dari penyampaian materi

yang bertahap sesuai dengan sintaks model pembelajaran Pendidikan Matematika Realistik. Oleh karena itu tahap perancangan sangat penting dalam mengembangkan produk yang bermanfaat bagi siswa. Tahap perancangan ini terdiri dari 3 bagian yaitu (a) rancangan pendahuluan, (b) rancangan pembelajaran, dan (c) rancangan evaluasi.

Tahap Pengembangan (develop)

Tahap pengembangan ini merupakan pengembangan dari rancangan yang telah dibuat pada tahap perancangan (*design*) yang terdiri dari 3 bagian yaitu (a) Pendahuluan, (b) Pembelajaran, dan (c) evaluasi.

Tabel 1. Rincian Tahapan Pengembangan

No.	Tahap Penelitian	Proses Penelitian	Hasil Penelitian
1.	<i>Define</i>	1. Menetapkan masalah dasar yang diperlukan dengan cara melakukan diskusi dengan guru matematika kelas IV SDN Tunjungsekar 3.	- Berbagai teori belajar yang relevan dan tantangan serta tuntutan masa depan. - Deskripsi pola pembelajaran yang dianggap paling sesuai.
		2. Melakukan telaah keri-kulum matematika KTSP.	Penggunaan materi yang telah ada pada kurikulum SD yaitu pada KTSP.
		3. Wawancara terhadap 2 guru kelas IV SDN Tunjungsekar	- Materi matematika yang dirasa sulit oleh siswa adalah materi KPK dan FPB. - Data daftar nilai formatif materi KPK dan FPB siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 pada materi KPK dan FPB 25 siswa dari keseluruhan 32 siswa belum mencapai KKM.
		4. Wawancara terhadap 2 guru kelas IV SDN Tunjungsekar	- Materi matematika yang dirasa sulit oleh siswa adalah materi KPK dan FPB. - Data daftar nilai formatif materi KPK dan FPB siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 pada materi KPK dan FPB 25 siswa dari keseluruhan 32 siswa belum mencapai KKM.
		4. Analisis latar belakang kemampuan akademik untuk mata pelajaran prasyarat yaitu kelipatan dan faktor.	Kemampuan kognitif dan latar belakang kemampuan akademik siswa untuk kemampuan prasyarat secara klasikal ketuntasan mencapai 87% yang dapat dikatakan cukup baik.
		5. Mengidentifikasi konsep-konsep KPK dan FPB yang akan diajarkan, menyusunnya secara sistematis, serta mengaitkan satu konsep dengan konsep yang lainnya.	Membentuk peta konsep.
		6. Melakukan identifikasi berbagai keterampilan yang disesuaikan dengan pencapaian indikator pembelajaran.	Pengembangan kegiatan belajar dalam modul yang disesuaikan dengan pendekatan PMR.
		7. Penyusunan tujuan pembelajaran yang didasarkan pada	Tujuan pembelajaran

No.	Tahap Penelitian	Proses Penelitian	Hasil Penelitian
		kompetensi dasar dan indikator yang tercantum dalam silabus.	
2.	<i>Design</i>	Merancang bahan ajar berbasis PMR berbantuan <i>puzzle</i> .	Draft-I modul berbasis PMR berbantuan <i>puzzle</i> .
3.	<i>Develop</i>	Mengembangkan rancangan yang telah dibuat.	Modul berbasis PMR berbantuan <i>puzzle</i> .

Uji Coba Produk

Tujuan uji coba produk adalah untuk mendapatkan data akurat yang dapat dipergunakan sebagai dasar untuk melakukan revisi (perbaikan) agar tercapai kepraktisan dan keefektifan produk ini. Sebelum uji coba lapangan, dilakukan validasi oleh ahli dan praktisi, untuk menilai tingkat kevalidannya. Hasil revisi dari validasi ahli sebagai bahan untuk melakukan uji coba lapangan. Uji coba lapangan ini dilakukan pada siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang. Hasil uji coba lapangan kemudian dianalisis dan selanjutnya direvisi untuk mendapatkan produk bahan ajar dengan media *puzzle* berbasis PMR pada materi KPK dan FPB yang valid, praktis, dan efektif.

Data uji coba berdasarkan kriteria produk yang diperoleh dari penelitian dan tanggapan dari para ahli. Uji coba lapangan dilakukan untuk melihat sejauh mana tingkat kevalidan, keefektifan, dan kepraktisan *prototipe* bahan ajar matematika dengan media yang telah dibuat. Uji coba lapangan dilakukan dengan skala terbatas pada produk pengembangan bahan ajar matematika dengan media *puzzle* pada materi KPK dan FPB berbasis PMR untuk siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3.

Aspek kevalidan bahan ajar dan media ini dikaitkan tiga hal, yaitu (1) kevalidan dari aspek isi, (2) kevalidan dari aspek desain, dan (3) kevalidan dari aspek bahasa. Oleh karena itu, tingkat kevalidan dapat diketahui melalui validasi ahli yaitu ahli materi, ahli desain, dan ahli bahasa. Aspek kepraktisan bahan ajar dan media berkaitan dengan apakah bahan ajar dan media yang digunakan mudah dan menarik bagi siswa. Oleh karena itu tingkat kepraktisan dapat diketahui dari hasil analisis keterlaksanaan bahan ajar dan media melalui kegiatan uji coba lapangan. Sedangkan aspek keefektifan bahan ajar beserta medianya dapat dilihat dari komponen-komponan (1) hasil belajar siswa, (2) aktivitas siswa dan guru, (3) respon siswa terhadap bahan ajar beserta media *puzzle* yang dikembangkan.

Subjek uji coba dalam pengembangan bahan ajar ini adalah para ahli yang telah memenuhi kriteria dalam pengembangan media pembelajaran dan menguasai materi yang dikembangkan. Dalam hal ini peneliti mengambil tiga orang ahli sebagai ahli isi/materi, ahli bahasa, dan ahli media yaitu satu orang dosen matematika, satu orang dosen bahasa, dan satu orang dosen teknologi pembelajaran. Untuk subjek dalam uji coba produk pada kelompok kecil atau uji coba lapangan yang dilakukan untuk mengetahui kelayakan bahan ajar yang dikembangkan yaitu bahan ajar berbasis PMR berbantuan *puzzle* pada materi KPK dan FPB, dalam penelitian ini adalah siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang. Penelitian dilakukan pada semester genap tahun pelajaran 2012/2013.

Jenis data yang diperoleh dari uji coba produk pengembangan bahan ajar materi KPK dan FPB berbasis PMR berbantuan *puzzle* untuk siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 ini dikelompokkan menjadi dua, yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Penelitian

yang dilakukan adalah penelitian *Research and Development (R&D)*. Data kualitatif berupa komentar, tanggapan, dan saran perbaikan dari validator dan observer yang diperoleh melalui validasi maupun uji coba produk. Validator meliputi ahli materi, ahli desain, dan ahli bahasa. Observer mengamati aktivitas siswa, aktivitas guru, dan keterlaksanaan bahan ajar. Komentar dan saran tersebut digunakan sebagai pertimbangan dalam melakukan revisi terhadap pengembangan bahan ajar. Sedangkan data kuantitatif berupa skor penilaian yang diberikan oleh validator, observer, wawancara respon siswa, dan skor hasil belajar yang diperoleh melalui validasi maupun uji coba produk. Data yang berupa pedoman wawancara, lembar validasi, hasil wawancara respon siswa, serta skor hasil belajar kemudian dianalisis dan disesuaikan dengan kriteria yang sudah ditentukan, sehingga dapat disimpulkan tingkat kevalidan atau kelayakan bahan ajar tersebut.

Untuk mengukur tingkat kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan, maka disusun instrumen. Instrumen pengumpulan data pada pengembangan bahan ajar berbasis PMR berbantuan *puzzle* ini berupa (a) angket validasi, (b) lembar observasi, (c) pedoman wawancara, dan (d) hasil belajar. Hasil penilaian dari instrumen-instrumen tersebut kemudian dianalisis dengan menggunakan teknik analisis data yang ditentukan.

Lembar validasi digunakan untuk mengetahui validitas dari instrumen sebelum digunakan. Lembar validasi juga digunakan untuk memperoleh masukan berupa saran dan kritik terhadap draft awal (draft I) untuk memperbaiki bahan ajar yang dihasilkan. Lembar validasi yang dirancang dalam penelitian ini adalah (1) lembar validasi bahan ajar berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR), dan (2) lembar validasi media *puzzle*. Lembar observasi yang dimaksud terdiri dari (1) lembar observasi aktivitas siswa digunakan sebagai pedoman untuk mengamati kepraktisan bahan ajar matematika yang dikembangkan dan untuk memperoleh gambaran tentang aktivitas siswa dalam menggunakan bahan ajar matematika selama proses uji coba produk berlangsung, (2) lembar observasi aktivitas guru digunakan untuk memperoleh gambaran tentang aktivitas guru dalam menggunakan bahan ajar matematika selama proses uji coba lapangan berlangsung, dan (3) lembar observasi keterlaksanaan bahan ajar digunakan sebagai pedoman untuk mengamati kepraktisan, yaitu keterlaksanaan bahan ajar matematika dalam pelaksanaan uji coba produk.

Tes hasil belajar berperan sebagai instrumen penelitian digunakan untuk mengukur tingkat keefektifan bahan ajar yang dihasilkan. Tes hasil belajar terdiri dari tes latihan, tindak lanjut, dan hasil evaluasi. Perhitungan dari keseluruhan hasil belajar adalah 30% dari tes latihan, 20 % dari tindak lanjut, dan 50% dari hasil evaluasi. Data akan dianalisis dan hasilnya akan disesuaikan dengan kategori tingkat keefektifan yang telah ditentukan. Hasil belajar juga menentukan ketuntasan siswa. Jika diperoleh kesimpulan bahwa tes hasil belajar ini belum tidak mencapai 80% siswa yang mencapai nilai Kriteria Ketuntasan Minimum (KKM) yaitu 64, maka siswa dikatakan belum menguasai materi. Hasil analisis data ini akan digunakan sebagai dasar untuk merevisi bahan ajar yang dikembangkan.

Pedoman wawancara respon siswa yang dimaksud terdiri dari pedoman wawancara respon siswa terhadap bahan ajar dan pedoman wawancara respon siswa terhadap media *puzzle* materi KPK dan FPB berbasis Pendidikan Matematika Realistik. Pedoman wawancara digunakan untuk mengumpulkan data berupa respon siswa positif

atau negatif dari subjek uji coba untuk memperbaiki kekurangan yang ada dalam produk bahan ajar hasil pengembangan. Instrumen berupa pedoman wawancara ini digunakan untuk memperoleh data kuantitatif, tentang bahan ajar hasil pengembangan dalam proses pembelajaran (1) pedoman wawancara respon siswa terhadap bahan ajar digunakan untuk mengumpulkan data tentang respon siswa terhadap bahan ajar selama mengikuti proses uji coba, dan (2) pedoman wawancara respon siswa terhadap media *puzzle*, digunakan untuk mengumpulkan data tentang respon siswa terhadap media *puzzle* selama mengikuti proses uji coba.

Teknik analisis data yang digunakan pada penelitian ini adalah (1) analisis deskriptif kualitatif digunakan untuk menganalisis data berupa catatan, saran, atau komentar berdasarkan hasil penilaian yang terdapat pada lembar validasi dan lembar observasi, serta (2) analisis statistik deskriptif digunakan untuk menganalisis data berupa skor dari hasil validasi, observasi, pedoman wawancara respon siswa, dan ketuntasan belajar.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Proses Pengembangan

Tahap pendefinisian (define)

Tahap pendefinisian merupakan tahapan awal dalam pengembangan, adapun kegiatan pada tahapan ini adalah sebagai berikut (1) analisis akhir terdapat dilakukan untuk menetapkan masalah dasar yang diperlukan dalam pengembangan perangkat pembelajaran di SDN Tunjungsekar 3 dengan cara melakukan diskusi dengan guru matematika, (2) analisis siswa dengan menganalisis karakteristik siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Tahun akademik 2012/2013, meliputi latar belakang kemampuan akademik untuk mata pelajaran prasyarat yaitu kelipatan dan faktor, (3) analisis konsep dengan mengidentifikasi konsep-konsep KPK dan FPB yang akan diajarkan dan menyusunnya secara sistematis, serta mengaitkan satu konsep dengan konsep yang lainnya sehingga membentuk sebuah peta konsep, (4) analisis tugas dengan melakukan identifikasi berbagai keterampilan yang disesuaikan dengan pencapaian indikator pembelajaran, dan (5) spesifikasi indikator pembelajaran didasarkan pada kompetensi dasar dan indikator tercantum dalam silabus matematika kelas IV semester 1.

Tahap perancangan (design)

Tahap ini bertujuan merancang bahan ajar berbasis PMR berbantuan *puzzle*. Hasil dari tahap perancangan (*design*) disebut draf-1. Bahan ajar yang dihasilkan adalah modul berbasis PMR. Adapun kegiatan pada tahap ini sebagai berikut (1) rancangan pendahuluan yang terdiri dari deskripsi, prasyarat, petunjuk penggunaan, tujuan, kompetensi, cek kemampuan dan peta konsep, (2) rancangan pembelajaran, yang terdiri dari kegiatan menentukan KPK dan FPB dari dua bilangan, menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan KPK dan FPB, umpan balik, dan tindak lanjut, serta (3) rancangan evaluasi yang berbentuk *essay* yaitu siswa menentukan KPK dan FPB serta menyelesaikan masalah realistik yang berkaitan dengan KPK dan FPB.

Tahap Pengembangan (*develop*)

Tahap pengembangan ini merupakan pengembangan dari rancangan yang telah dibuat pada tahap perancangan (*design*) yang terdiri dari 3 bagian yaitu (1) pendahuluan, (2) pembelajaran, dan (3) evaluasi.

Hasil Validasi

Berdasarkan hasil validasi ahli terhadap bahan ajar, diperoleh skor rata-rata keseluruhan aspek ($\bar{V}_a$) adalah 3,31. Menurut kriteria kevalidan yang telah ditetapkan, maka prototipe bahan ajar dapat dikatakan valid. Komentar dan saran dari validator ahli materi bahan ajar berkaitan dengan perlunya ada perbaikan pemaparan konsep yang kurang jelas bagi siswa.

Berdasarkan hasil validasi ahli terhadap bahan ajar, diperoleh skor rata-rata keseluruhan aspek ($\bar{V}_a$) adalah 3,51. Menurut kriteria kevalidan yang telah ditetapkan, maka prototipe bahan ajar dapat dikatakan valid. Saran dan komentar berkaitan dengan penataan kembali desain sampul bahan ajar karena terkesan ramai dan perlu diperhatikan lagi keseimbangan judul, logo dan lain-lain. Saran lain perlu dikaji ulang tahapan kerja dalam penggunaan bahan ajar perlu dicoba pada siswa sebelum diuji lapangan (siswa paham atau tidak).

Berdasarkan hasil validasi ahli terhadap bahan ajar, diperoleh skor rata-rata keseluruhan aspek ($\bar{V}_a$) adalah 3,47. Menurut kriteria kevalidan yang telah ditetapkan, maka bahasa dalam bahan ajar dapat dikatakan valid. Saran dan komentar berkaitan dengan (1) pendahuluan hendaknya menggambarkan isi keseluruhan modul, membuat standar kompetensi, kompetensi dasar, dan tujuan instruksional, serta menjelaskan strategi mempelajari modul, (2) peta konsep sepertinya perlu ditukar posisi antara faktor bilangan (sebelah kanan) dan kelipatan persekutuan terkecil (sebelah kiri), (3) daftar isi perlu disesuaikan dengan penomoran, dan (4) *heading* perlu ditata secara konsisten.

Berdasarkan hasil validasi ahli terhadap media *puzzle*, diperoleh skor rata-rata keseluruhan aspek ($\bar{V}_a$) adalah 3,40. Menurut kriteria kevalidan yang telah ditetapkan, maka prototipe media *puzzle* dapat dikatakan valid. Saran dan komentar berkaitan dengan perlu adanya penanda dari tiga *puzzle* yang ada serta petunjuk penggunaan *puzzle* untuk menyelesaikan masalah matematika perlu dicermati kembali.

Uji Coba dan Analisis Data Hasil Uji Coba

Uji coba yang dimaksud adalah uji coba lapangan. Uji coba ini digunakan untuk menilai kevalidan, kepraktisan dan keefektifan bahan ajar. Uji coba ini dilakukan terhadap siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang. Uji coba dilakukan sebanyak empat kali pertemuan. Uji coba berlangsung mulai tanggal 23 April 2013 sampai 27 April 2013 di kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang. Jumlah siswa di kelas ini ada 32 siswa. Tiap pertemuan berdurasi 70 menit. Peneliti sekaligus guru yang mengajar matematika di kelas IV SDN Tunjungsekar 3. Uji coba ini diobservasi oleh dua orang observer. Kedua observer ini mengobservasi keterlaksanaan bahan ajar, aktivitas guru dan siswa dalam menggunakan bahan ajar. Bertindak sebagai observer adalah dua orang guru kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kecamatan Lowokwaru Kota Malang.

Berdasarkan observasi dari dua observer skor rata-rata seluruh aspek keterlaksanaan bahan ajar untuk pertemuan ke-1, 2, 3, dan 4 berturut-turut adalah 3,69; 3,81; 3,63 dan 3,88. Ternyata masing-masing skor rata-rata tersebut lebih dari 2. Menurut kriteria kepraktisan yang telah ditetapkan, maka keterlaksanaan bahan ajar setiap pertemuan memenuhi kriteria tinggi. Skor rata-rata seluruh aspek keterlaksanaan bahan ajar seluruh pertemuan adalah 3,75. Menurut kriteria kepraktisan yang telah ditetapkan, maka keterlaksanaan bahan ajar selama empat pertemuan memenuhi kriteria tinggi. Ini berarti bahan ajar memenuhi kriteria kepraktisan yang telah ditetapkan.

Uji kemampuan diikuti oleh seluruh siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 sejumlah 32 siswa. Hasil latihan ditentukan dengan mengambil rata-rata dari dua hasil latihan dari empat pertemuan. Berdasarkan hasil belajar, sebanyak 27 siswa atau 84% dari 32 siswa memperoleh nilai di atas skor minimal 64, sedangkan 5 siswa atau 16% memperoleh skor kurang dari 64. Berdasarkan kriteria ketuntasan yang telah ditetapkan di SDN Tunjungsekar 3 Kecamatan Lowokwaru Kota Malang, maka hasil belajar siswa pada materi kelipatan persekutuan terkecil dan faktor persekutuan terbesar telah mencapai kriteria ketuntasan.

Berdasarkan hasil observasi aktivitas siswa dari dua observer skor rata-rata seluruh aspek aktivitas siswa seluruh pertemuan adalah 4,35. Menurut kriteria keaktifan yang telah ditetapkan, maka aktivitas siswa selama empat pertemuan memenuhi kriteria sangat aktif. Berdasarkan hasil observasi aktivitas guru dari dua observer skor rata-rata seluruh aspek aktivitas guru seluruh pertemuan adalah 3,79. Menurut kriteria keaktifan yang telah ditetapkan, maka aktivitas guru selama empat pertemuan memenuhi kriteria aktif. Berdasarkan hasil wawancara respon siswa terhadap bahan ajar, rata-rata respon siswa terhadap bahan ajar adalah 1,95, sehingga berdasarkan kriteria yang telah ditetapkan memenuhi respon positif. Berdasarkan hasil wawancara respon siswa terhadap media *puzzle*, secara klasikal rata-rata respon siswa adalah 1,96, sehingga berdasarkan kriteria yang telah ditetapkan memenuhi respon positif.

Berdasarkan rangkuman analisis hasil uji coba, maka bahan ajar telah memenuhi kriteria kevalidan, kepraktisan, dan keefektifan. Dengan demikian, berdasarkan hasil validasi oleh tiga orang ahli, serta berdasarkan analisis hasil uji coba, maka secara teori bahan ajar siswa dapat dikembangkan ini dapat dikatakan valid, praktis, dan efektif.

Tabel 2. Rangkuman Analisis Hasil Uji Coba

	Indikator	Hasil Uji Coba	Kesimpulan
Kevalidan	Validasi ahli isi bahan ajar	Valid	Memenuhi kriteria yang diharapkan
	Validasi ahli desain bahan ajar	Valid	Memenuhi kriteria yang diharapkan
	Validasi ahli media <i>puzzle</i>	Valid	Memenuhi kriteria yang diharapkan
Kepraktisan	Keterlaksanaan bahan ajar	Tinggi	Memenuhi kriteria yang ditetapkan
Keefektifan	Aktivitas siswa	Sangat aktif	Memenuhi kriteria yang ditetapkan
	Aktivitas guru	Sangat Aktif	Memenuhi kriteria yang ditetapkan
	Respon siswa	Positif	Memenuhi kriteria yang ditetapkan

Indikator	Hasil Uji Coba	Kesimpulan
Ketuntasan belajar	Tuntas	Memenuhi kriteria yang ditetapkan

Revisi Produk hasil Pengembangan

Berdasarkan hasil analisis data kuantitatif, diketahui bahwa bahan ajar yang dikembangkan telah memenuhi kriteria valid, praktis, dan efektif, sehingga tidak perlu direvisi. Namun pada data kualitatif, ada beberapa masukan, saran, maupun hasil pengamatan pengembang selama uji coba, sehingga pada bahan ajar yang dikembangkan ada yang perlu diperbaiki.

Tabel 3. Perbaikan Bahan Ajar Berdasarkan Masukan, Saran, dan Hasil Pengamatan Pengembang

No.	Masukan/Saran/Hasil Pengamatan	Perbaikan
A. Masukan/saran dari Validator Ahli Isi Bahan Ajar		
1.	Pada kegiatan 1 masalah 1 halaman 10, "Kelipatan 2" diganti "Kuning" dan Kelipatan 3 diganti "Merah".	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
2.	Pada kegiatan 1 masalah 2 halaman 12 pada pertanyaan ditambah dengan kata "untuk pertama kali" agar sesuai dengan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
3.	Pada kegiatan 1 masalah 2 halaman 12 penggunaan kata "angka" diganti dengan kata "bilangan".	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
4.	Pada kegiatan 1 masalah 2 halaman 12 sebelum langkah penyelesaian masalah menggunakan kartu puzzle ditambahkan alternatif pemecahan menggunakan bilangan loncat untuk menanamkan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
5.	Pada kegiatan 1 masalah 2 halaman 13 poin 4 ditambah dengan cek dengan bilangan lompat.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
6.	Pada kegiatan 1 masalah 3 halaman 18 pada pertanyaan ditambah dengan kata "untuk pertama kali" agar sesuai dengan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
7.	Pada kegiatan 1 masalah 3 halaman 21 point C pada kesimpulan pengertian KPK harus diperjelas dengan kata faktor prima agar sesuai dengan konsep KPK	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
8.	Pada kegiatan masalah 3 halaman 23 dan 24 pada "Latihan Yuk" pada setiap pertanyaan harus ditambah dengan kata "pertama kali" agar sesuai dengan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
9.	Pada kegiatan 2 masalah 3 pada point penyelesaian kalimat pertama perlu penjelasan dulu kenapa harus disamakan penyebut".	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
10.	Pada kegiatan 2 masalah 4 pada pertanyaan kata "kedua kali" diganti "pertama kali" agar sesuai dengan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
11.	Pada kegiatan 2 masalah 5 pada masalah yang disajikan "bersepeda dengan kecepatan 20 km/jam" (bersepeda angin dengan kecepatan 20 km/jam terlalu cepat, diganti "bersepeda dengan kecepatan 10km/jam" agar lebih realistic.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
12.	Pada kegiatan 2 "Mari Berlatih" pertanyaan nomor 1, tahun "2011" diganti "2012" agar konteks sesuai dan terdapat kalimat yang salah, terketik 2 kali.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
13.	Pada kegiatan 2 "Mari Berlatih" pertanyaan nomor 2 kalimat "Orang dewasa duduk tepat di 17 meja dan anak-anak duduk tepat di 15 meja" diganti "Orang dewasa duduk tepat di 17 kursi dalam satu meja dan anak-anak duduk tepat di 15 kursi	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi

No.	Masukan/Saran/Hasil Pengamatan	Perbaikan
	dalam satu meja, jadi kalimat diperbaiki, tidak duduk di meja tapi di kursi.	
14.	Pada kegiatan 2 pada mari berlatih pertanyaan nomor 4 ditambah kata “untuk pertama kali” agar sesuai dengan konsep KPK.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
15.	Pada contoh permasalahan halaman 50 pada alternatif jawaban harus ditambahkan pertanyaan-pertanyaan yang disertai pembahasan “Bisakah dibuat 1 kelompok?, Bagaimana kalau dibuat 2 kelompok? dst” setelah itu baru menggunakan faktor agar lebih realistik.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
16.	Pada kegiatan 3 masalah 1 alternatif pemecahan ke-2 langkah 1 dan 2 halaman 58 dan 59 lingkaran kuning untuk bilangan pembagi terlalu banyak dan letaknya tidak tepat sehingga dapat membingungkan siswa, serta perlu ditambah dengan anak panah yang disertai penjelasan kata “dibagi” dan “hasilnya” untuk memudahkan siswa memahami maksudnya	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
17.	Pada kegiatan 3 masalah 1 halaman 60 harus diperjelas isi yang dikehendaki apa agar tidak membingungkan siswa dalam mengerjakan.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
18.	Pada kegiatan 3 masalah 1 halaman 62 pada materi nomor 1 perlu diberi ilustrasi contoh agar lebih jelas	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
19.	Pada kegiatan 3 masalah 1 halaman 72 dan 73 lingkaran kuning untuk bilangan pembagi terlalu banyak dan letaknya tidak tepat sehingga dapat membingungkan siswa, serta perlu ditambah dengan anak panah yang disertai penjelasan kata “dibagi” dan “hasilnya” untuk memudahkan siswa memahami maksudnya	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
B. Masukan/saran dari Validator Ahli Desain Bahan Ajar		
1.	Desain sampul modul sebaiknya ditata kembali, kesan ramai, dan keseimbangan judul, logo dll.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
2.	Tahapan kerja dalam penggunaan <i>puzzle</i> perlu dicoba pada siswa sebelum diuji lapangan (paham atau tidak).	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
C. Masukan/saran dari Validator Ahli Bahasa Bahan Ajar		
1.	Pendahuluan hendaknya (1) menggambarkan isi keseluruhan modul, (memuat standar kompetensi, kompetensi dasar, dan tujuan instruksional, (3) menjelaskan strategi mempelajari modul.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
2.	Peta konsep perlu ditukar posisi, faktor bilangan (sebelah kanan) dan kelipatan bilangan diikuti (sebelah kiri) urutan ke bawahnya. Ini agar relevan dengan urutan penyajiannya.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
3.	Sepertinya perlu ada daftar isi yang sesuai dengan penomoran.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
4.	<i>Heading-heading</i> perlu ditata secara konsisten.	
D. Masukan/saran dari Validator Ahli Media Puzzle		
1.	Perlu ada penanda dari tiga <i>puzzle</i> yang ada.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi
2.	Petunjuk penggunaan <i>puzzle</i> untuk menyelesaikan masalah matematika perlu dicermati kembali.	Pernyataan yang dimaksud sudah direvisi

PENUTUP

Kajian Produk yang Telah Direvisi

Pembelajaran yang digunakan pada produk pengembangan adalah berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR) berbantuan *puzzle*. Oleh karena itu pada produk pengembangan menyajikan materi dan masalah-masalah realistik yang ada dalam kehidupan sehari-hari siswa. Kegiatan yang dilakukan siswa dalam pembelajaran

berdasarkan langkah-langkah yang sesuai prinsip-prinsip PMR antara lain (1) membaca dan memahami kegiatan berisi masalah di dalam modul sesuai, (2) menyelesaikan masalah dan mendeskripsikan dengan menggunakan berbagai model, (3) membandingkan jawaban dan berinteraksi dalam diskusi, dan (4) bertanya atau menanggapi pertanyaan, dan (5) menulis dan menarik kesimpulan pembelajaran di dalam modul.

Karakteristik produk pengembangan ini adalah bahan ajar berupa modul yang memuat komponen-komponen berikut (1) sampul pada bahan ajar memuat gambar bilangan-bilangan yang berwarna-warni, (2) kata pengantar memuat ungkapan rasa syukur kehadiran Allah SWT, (3) daftar isi memuat halaman yang memudahkan pengguna untuk mencari topik maupun subtopik yang disajikan dalam bahan ajar, (4) bab I (pendahuluan) memuat deskripsi, kemampuan prasyarat, petunjuk penggunaan, tujuan, kompetensi, cek kemampuan, (5) bab II (pembelajaran) meliputi beberapa kegiatan antara lain menentukan KPK, menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan KPK, menentukan FPB, dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan FPB, (6) bab III (evaluasi) digunakan untuk mengetahui ketuntasan siswa dalam mempelajari materi KPK dan FPB setelah menggunakan bahan ajar berbantuan *puzzle*, dan (7) daftar pustaka memuat daftar rujukan sebagai sumber pustaka dalam menyusun bahan ajar.

Berdasarkan catatan yang diperoleh dari hasil uji coba lapangan, ditemukan adanya kelebihan dari bahan ajar yang dikembangkan antara lain (1) bahan ajar dapat digunakan sebagai sumber belajar siswa dalam pembelajaran berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR), (2) bahan ajar disusun untuk kepentingan siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3, sehingga strukturnya sesuai dengan karakteristik siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3, (3) bahan ajar disusun untuk membimbing siswa dalam mengkonstruksi/membangun konsep sendiri terhadap materi yang disajikan di dalamnya, (4) bahan ajar memberikan ruang bagi pengguna untuk menuangkan ide dan gagasannya, (5) bahan ajar memberikan kesempatan kepada siswa untuk berlatih menyelesaikan permasalahan realistik secara mandiri, (6) bahan ajar memberi peluang kepada siswa untuk berinteraksi dengan teman maupun guru.

Adapun kelemahan bahan ajar yang telah disusun antara lain (1) pada analisis masalah pembelajaran dan analisis karakteristik siswa dalam pembelajaran matematika materi KPK dan FPB pada siswa Kelas IV di SDN Tunjungsekar 3 Kecamatan Lowokwaru Kota Malang, sehingga keberadaannya juga hanya sesuai dengan siswa kelas IV SDN Tunjungsekar 3 Kecamatan Lowokwaru Kota Malang, (2) alokasi waktu yang tidak sesuai dari perencanaan (waktu yang dialokasikan masih kurang), (3) permasalahan sehari-hari dalam bentuk soal cerita yang disajikan dalam bahan ajar adalah hal yang belum biasa bagi siswa, sehingga ketika mereka membaca permasalahan tersebut, siswa masih banyak bertanya kepada guru, dan (4) kegiatan-kegiatan dalam bahan ajar yang berfungsi untuk menuntun siswa menemukan konsep pengetahuannya sendiri masih memerlukan bimbingan guru.

Saran

Saran Pemanfaatan

Berdasarkan hasil uji coba di lapangan, maka untuk mengoptimalkan pemanfaatan bahan ajar, saran dalam pemanfaatan bahan ajar antara lain (1) guru hendaknya memperhatikan alokasi waktu dalam memanfaatkan bahan ajar yang telah disusun, dan (2) guru hendaknya membimbing siswa dalam pembelajaran menggunakan bahan ajar berbasis PMR berbantuan *puzzle*.

Saran Diseminasi

Untuk saran diseminasi antara lain (1) pengembangan bahan ajar ini hanya sampai pada tahap 3D dari 4D. Oleh karena itu, untuk tahap penyebaran (diseminasi) sebaiknya perlu dilakukan uji validasi terlebih dahulu, dan (2) karena bahan ajar ini berdasarkan hasil analisis masalah pembelajaran dan analisis karakteristik siswa dalam pembelajaran matematika di SDN Tunjungsekar 3 Kota Malang, maka bila hendak melakukan diseminasi sebaiknya dilakukan observasi awal tentang karakteristik atau analisis masalah pembelajaran pengguna yang lain.

Saran Pengembangan

Untuk saran pengembangan lebih lanjut, perlu diperhatikan (1) pilih materi lain yang sesuai untuk mengembangkan bahan ajar berbasis Pendidikan Matematika Realistik (PMR), dan (2) upayakan pengembangan bahan ajar materi KPK dan FPB dengan pendekatan lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Adam, D., & Hamm, M. 2010. *Demistify Math, Science, and Technology: Crativity, Innovation, and Problem Solving*. Plymouth: Rowman & Littlefield Education.
- Asra. 2004. "*Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Berdasarkan Pendekatan Konstruktivisme untuk Topik Persegipanjang dan Persegi di Kelas 1 SMP Negeri 22 Surabaya*." Tesis tidak diterbitkan. Surabaya: Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya.
- Beaton, A.E. 1996. *Mathematics Achievement in The Middle School Years*. Boston: TIMSS International Study Center.
- Becker & Shelter. 1996. *Elementary School Practise*. In A.J. Bishop. *International Hand Book of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer
- BNSP. 2006. *Pengembangan Bahan Ajar*. Jakarta: Kementerian Pendidikan Nasional.
- Depdiknas. 2006. *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia (Permendiknas) Nomor 22 Tahun 2006 Tentang Standar Isi Sekolah Menengah Pertama*. Jakarta: Depdiknas.
- Fadjar, S. 2010. *Modul Matematika SMP Program Bermutu (Pembelajaran Matematika dengan Pendekatan Realistik di SMP)*. Yogyakarta: Jurnal UNY.
- Flegg, G. 1983. *Numbers: Their History and Meaning*. New York: Schocken Books.
- Freudenthal, H. 1991. *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Haji, S. 2008. *Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Melalui Pendekatan Matematika Realistik di Kelas VII SMPN 1 Kotamadya Bengkulu*. Jurnal Universitas Bengkulu. Vol.9. No. 3. September 2008. FKIP MIPA Universitas Bengkulu.
- Hobri. 2008. "*Realistic Methamatics Education (RME): Konsepsi dan Pelaksanaannya*". Jember: Lembaga Penelitian Universitas Jember.
- Hobri. 2010. *Metodologi Penelitian Pengembangan (Aplikasi Pada Penelitian Pendidikan Matematika)*. Jember: Pena Salsabila.

- Hudojo, H. 1990. *Strategi Dasar Belajar Mengajar Matematika*. Malang: IKIP Malang.
- Gravemeijer, K.P.E. 1994. *Developing Realistic Mathematics Education*. *Freudenthal Institute*, Utrecht: Freudenthal Institute.
- Kadarwati. 2004. *Pendekatan Realistik Matematika pada Pembelajaran Perkalian dan Pembagian Bilangan Cacah Bagi Siswa Kelas II SDN Sidorejo Kota Salatiga*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: PPS Universitas Negeri Malang.
- Miswanto. 2012. *Pengembangan Buku Siswa Bercirikan Penemuan Terbimbing Materi Eksponen*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: Pascasarjana Universitas Negeri Malang.
- Nugroho, P. 2008. *Pengembangan Modul Pembelajaran Menggunakan Teori Bruner Materi Kubus dan Balok*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: Pascasarjana Universitas Negeri Malang.
- Panhuizen, Van den Heuvel. 1998. *Realistics Mathematics Education Work ini Progress*. <http://www.fi.nl/.....2000>. Mathematics Education in The Netherlands a Guided Tour. (Online). <http://www.fi.uu.nl/en/indexpublicaties.html>, diakses 20 Februari 2012.
- Royani, M. 2008. *Pendekatan Realistik dalam Soal Cerita pada Buku Matematika Sekolah Dasar*. Banjarmasin: Jurnal Kependidikan dan Kemasyarakatan STKIP-PGRI Banjarmasin. Vol. 3 No. 1. Januari-Juni 2008
- Siswoyo, A.A. 2012. *Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Berbasis Realistic mathematic Education (RME)*. Tesis tidak diterbitkan. Malang: Pascasarjana Universitas Negeri Malang.
- Thiagarajan, S., Semmel, D.S & Semmel, M.I, 1974. *Instructional Development fo Training Teachers of Exceptional Children*. A Source Book Bloomington Center for Innovation on Teaching The Handicapped. Indiana: Indiana University.
- Treffers, A. 1991. *Didactical Background of a mathematics Program for Primary School*. Dalam *Leen Streefland (Ed), Realistics Education In Primary School: On The Occasion of The Opening of The Freudenthal Institute* (hlm. 11). Netherland: Utrecht University. (CD-β Press)
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. 1996. *Assesment and Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-β Press, Center for Science and Mathematics Education.
- Wijaya, A. 2011. *Pendidikan Matematika Realistik Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Yuwono, I. 2001b. *RME (Realistic Mathematics Education) dan Hasil Studi Awal Implementasi di SLTP*. Makalah disajikan dalam Seminar Nasional 'Realistic Mathematics Education' di UNESA. Surabaya: 24 Februari 2001.

ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN SOAL CERITA BERDASARAKAN TAHAPAN NEWMAN DAN SCAFFOLDING-NYA

Alifiani

Universitas Islam Malang

alifiani.matematika@yahoo.com

Abstrak: Soal cerita seringkali menjadi masalah bagi mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika UNISMA. Permasalahan ini juga terjadi saat mahasiswa menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim dalam matakuliah kalkulus lanjut. Terbukti dari hasil tes yang diberikan, hanya ada 6 mahasiswa dari 114 mahasiswa yang menempuh matakuliah kalkulus lanjut, atau hanya 0.05% mahasiswa yang mampu menyelesaikan soal cerita dengan benar. Oleh karena itu, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis jenis kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam proses mengerjakan soal cerita berdasarkan tahapan analisis kesalahan Newman. Selanjutnya, hasil analisis tersebut digunakan untuk memberikan *scaffolding* kepada mahasiswa. Penelitian ini merupakan jenis penelitian deskriptif eksploratif dengan pendekatan kualitatif. Subjek penelitian adalah 3 orang mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika UNISMA. Berdasarkan hasil penelitian, kesalahan yang dilakukan mahasiswa ada pada tahap membaca (*Reading*), memahami (*Comprehension*), transformasi (*Transformation*), kemampuan proses (*Process Skill*) dan penulisan jawaban (*Encoding*). Bentuk *scaffolding* yang diberikan adalah *environmental provisions*, *explaining*, *reviewing* and *restructuring*, serta *developing conceptual thinking*.

Kata Kunci: *Scaffolding*, Analisis Kesalahan Newman, Soal Cerita, Harga Ekstrim, Kalkulus Lanjut

PENDAHULUAN

Bagi mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika, kemampuan untuk menyelesaikan soal pemecahan masalah, termasuk soal cerita merupakan suatu keharusan (Suyitno dan Suyitno, 2015). Mahasiswa dapat memahami prosedur matematis, tetapi tanpa dapat mengaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, kemampuan tersebut tidak akan bermakna dan dapat dengan mudah dilupakan (Bates dan Weist, 2004). Soal cerita adalah salah satu komponen penting dalam matematika yang melibatkan aplikasi matematika dalam permasalahan pada kehidupan sehari-hari (Ahmad, Tarmizi, dan Nawawi, 2010). Soal cerita merupakan soal yang lebih unik dan menantang daripada soal matematika biasa karena dalam menyelesaikan soal cerita mahasiswa dituntut untuk dapat mengkaitkan antara yang diketahui dan tidak diketahui serta menterjemahkan kalimat soal ke dalam kalimat matematika (Ahmad, Tarmizi, dan Nawawi 2010). Hal ini juga didukung oleh Bates dan Wiest (2004) bahwa soal cerita menyediakan masalah yang menantang mahasiswa untuk mengaplikasikan kemampuan berpikir matematis dalam berbagai situasi dan merupakan suatu alat yang efisien untuk mengkaitkan kemampuan berpikir matematis dalam kehidupan sehari-hari. Menurut Tello (2010) soal cerita berguna untuk menguji pemahaman mahasiswa karena saat menyelesaikan soal cerita mahasiswa dituntut untuk dapat menggunakan informasi yang terdapat pada soal untuk menentukan strategi yang tepat dalam menemukan solusi. Sejalan dengan Tello (2010), Pratipong dan Nakamura (2006) berpendapat bahwa dalam menyelesaikan soal cerita mahasiswa harus menginterpretasikan maksud soal dalam kalimat matematika sebelum mengaplikasikan proses matematis untuk menemukan jawaban yang tepat.

Soal cerita tidak hanya menyediakan tantangan bagi mahasiswa tetapi juga bagi dosen (Tello, 2010). Meskipun dosen telah mengajarkan konsep matematika yang cukup untuk menyelesaikan soal cerita, mahasiswa tetap sering merasa bingung dan kesulitan mengkaitkan konsep yang dipelajari dengan soal cerita. Hal ini didukung oleh Ahmad, Tarmizi, dan Nawawi (2010) bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam mentransformasikan kalimat soal cerita ke dalam kalimat matematis. Menurut Tello (2007) mahasiswa juga mengalami kesulitan dalam memahami informasi yang ada dalam soal cerita sehingga mahasiswa sulit untuk menentukan strategi yang dapat digunakan untuk menemukan solusi. Dalam menyelesaikan soal cerita, faktor kognitif memiliki kontribusi yang besar pada keefektifan dalam menemukan solusi (Raduan, 2009). Faktor kognitif ini bisa dilihat dari bagaimana mahasiswa memahami masalah matematika, strategi yang diaplikasikan untuk memecahkan masalah, representasi matematis yang dibuat, argumen yang dibangun, dan pemahaman konsep yang diperlihatkan dalam jawaban dari suatu masalah (Jenkins, 2010). Oleh karena itu, setiap mahasiswa akan membuat kesalahan yang berbeda dalam menyelesaikan suatu soal (Lannin, Barker, dan Townsend, 2007).

Kesalahan juga dialami mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika Unisma saat menyelesaikan soal cerita pada mata kuliah kalkulus lanjut, khususnya pada materi harga ekstrim. Materi harga ekstrim berkaitan dengan fungsi maksimum dan minimum. Harga ekstrim merupakan aplikasi dari materi turunan parsial. Harga ekstrim terbagi menjadi 2, yaitu ekstrim tanpa syarat dan ekstrim bersyarat. Selanjutnya penelitian ini membahas tentang ekstrim bersyarat. Berdasarkan hasil tes yang diberikan, hanya ada 6 mahasiswa dari 114 mahasiswa yang menempuh matakuliah kalkulus lanjut, atau hanya 0.05% mahasiswa yang mampu menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim dengan benar. Dari 108 mahasiswa yang tidak menjawab benar, 42 mahasiswa tidak menjawab soal sama sekali dan hanya menuliskan soal kembali, 66 mahasiswa lainnya menjawab dengan bervariasi, ada yang hanya menuliskan diketahui dan ditanya, ada yang hanya menuliskan rumus luas permukaan balok, ada yang menjawab tetapi tidak selesai sampai menemukan jawaban akhir, ada juga yang sudah menjawab soal sampai menemukan jawaban akhir namun salah. Kesalahan yang dibuat mahasiswa bervariasi, diantaranya salah dalam salah dalam mentransformasi soal ke dalam kalimat matematika, salah dalam memilih strategi yang efektif, maupun salah dalam proses penghitungan. Bahkan banyak mahasiswa yang tidak mengkaitkan soal dengan konsep yang dipelajari, yaitu harga ekstrim.

Menurut Newman (1977) dalam Huang dan Cheng (2010), jika mahasiswa ingin mendapat solusi yang tepat dalam menyelesaikan soal cerita mahasiswa harus mengikuti langkah-langkah: (1) membaca soal (*reading*), (2) memahami apa yang dibaca (*comprehension*), (3) mentransformasi kalimat soal ke kalimat matematika untuk memilih strategi matematis yang tepat (*transformation*), (4) mengaplikasikan strategi yang dipilih dalam proses menemukan solusi yang tepat (*process skill*), (5) menuliskan jawaban dengan tepat (*encoding*). Kesalahan yang dibuat mahasiswa dalam menyelesaikan soal cerita selanjutnya dapat diidentifikasi berdasarkan langkah-langkah Newman tersebut. Selanjutnya disebut dengan analisis kesalahan Newman, yang meliputi (1) kesalahan membaca (*reading*) yaitu ketika mahasiswa bisa membaca soal tetapi salah memahami makna kalimat soal, (2) kesalahan memahami (*comprehension*), yaitu ketika mahasiswa

tidak memahami apa yang diketahui dan apa yang ditanya dari soal yang diberikan, (3) kesalahan transformasi (*transformation*), yaitu ketika mahasiswa tidak dapat menentukan konsep matematis, rumus, operasi, ataupun prosedur yang dapat digunakan untuk menemukan solusi, (4) kesalahan proses (*process skill*) yaitu ketika siswa tidak melakukan proses menemukan solusi dengan benar, (5) kesalahan penulisan jawaban (*encoding*) yaitu ketika mahasiswa tidak dapat merepresentasikan jawaban dengan tepat (Suyitno dan Suyitno, 2015). Prakitipong dan Nakamura (2006) kemudian merangkum pendapat Newman bahwa ada dua kesalahan yang biasa dialami mahasiswa untuk menemukan jawaban benar yaitu kesalahan lingustik yang meliputi membaca (*reading*) dan memahami (*comprehension*), dan kesalahan proses matematis yang meliputi kesalahan *transformation*, *process skill*, dan *encoding*.

Menurut Lannin, Barker, dan Townsend (2007) kesalahan ibarat kendaraan dalam pembelajaran yang mengantar mahasiswa menuju pemahaman. Jadi jika mahasiswa melakukan kesalahan dosen tidak boleh membetulkan, dosen harus memberikan bantuan bagi mahasiswa agar mahasiswa dapat menyadari kesalahan yang dibuat dan menemukan sendiri jawaban benar. Bantuan yang diberikan ini selanjutnya disebut dengan *scaffolding*, sesuai dengan pendapat Baxter dan William (2010) bahwa *scaffolding* merupakan bantuan yang diberikan pada tugas yang sebenarnya ada di luar kemampuan mahasiswa, mahasiswa diarahkan pada keterampilan atau pemahaman baru. Proses *scaffolding* dapat membangun hubungan yang dinamis antara dosen dengan mahasiswa yang dapat membantu mahasiswa untuk dapat mengerjakan tugas tertentu. Selanjutnya, bantuan yang diberikan secara perlahan dikurangi sampai mahasiswa dapat mengerjakan tugas secara mandiri. Sedangkan, menurut Anghileri (2006) *scaffolding* merupakan keterlibatan orang dewasa (dosen) pada proses belajar anak (mahasiswa). Anghileri (2006) selanjutnya mengidentifikasi 6 elemen *scaffolding* berdasarkan pendapat Wood, dkk (1976), yaitu: (1) menyelidiki kegemaran mahasiswa dan mengintegrasikannya ke dalam soal (*recruitment*), (2) menyederhanakan tugas sehingga umpan balik dapat diatur ke dalam level yang bisa digunakan untuk koreksi (*reduction in degrees of freedom*), (3) menjaga mahasiswa agar tetap pada tujuan yang ingin dicapai (*direction maintenance*), (4) menggarisbawahi hal penting (*marking critical features*), (5) mengontrol emosi mahasiswa (*frustration control*), (6) memodelkan solusi ke dalam tugas (*demonstration*). *Scaffolding* yang diberikan dapat berupa strategi pembelajaran yang melibatkan proses pendefinisian istilah dengan jelas, praktik berulang dengan prosedur yang benar, menyusun prosedur menjadi bagian-bagian kecil, dan memberi bantuan yang terkontrol (Lannin, Barker, dan Townsend, 2007).

Baxter dan Williams (2010) selanjutnya mengklasifikasikan *scaffolding* menjadi dua, yaitu *social scaffolding* dan *analytic scaffolding*. *Social scaffolding* merupakan bantuan yang diberikan dosen bagi mahasiswa agar dapat saling bekerjasama. *Social scaffolding* penting diberikan mengingat *social scaffolding* menyediakan lingkungan belajar yang membantu mahasiswa untuk membangun pengetahuan matematis. Sedangkan, *analytic scaffolding* merupakan bantuan berupa materi, guru, ataupun teman sebaya dalam membangun pemahaman matematis. *Analytic scaffolding* juga dapat berupa manipulasi fisik, model, metafora, representasi, penjelasan, ataupun justifikasi yang dapat membuat mahasiswa memiliki pemahaman yang lebih baik tentang masalah matematika

dan solusinya. Sedangkan Anghileri (2006) membagi *scaffolding* menjadi 3 level, yaitu *environmental provisions*; *explaining*, *reviewing and restructuring*; serta *developing conceptual thinking*.

Level 1 adalah *environmental provision*, level ini belum melibatkan interaksi antara dosen dengan mahasiswa secara langsung. Pada *scaffolding* level 1, bantuan yang diberikan masih belum terkait langsung dengan matematika tetapi masih pada menarik perhatian dan memotivasi mahasiswa. Hal ini dapat dilakukan dengan cara mengatur ruang kelas, menyediakan media pembelajaran, memberikan tugas terstruktur, dan menggunakan model pembelajaran kooperatif. Selanjutnya pada level 2, *explaining*, *reviewing and restructuring* yang mulai melibatkan interaksi antara guru dan siswa dan mengaitkan dengan matematika. Pada tahap ini, pertama-tama dosen menjelaskan (*explaining*) ide matematis yang dipelajari. Selanjutnya *reviewing*, yang terdiri dari 5 tipe interaksi yaitu (1) membuat mahasiswa melihat, menyentuh, dan mendeskripsikan apa yang dilihat dan dipikirkan, (2) membuat mahasiswa menjelaskan dan melakukan justifikasi, (3) menginterpretasikan tindakan dan perkataan mahasiswa, (4) mengajukan pertanyaan, (5) *parallel modeling*, yaitu memberikan contoh soal sejenis dengan soal yang diberikan. Kemudian *restructuring* yang melibatkan interaksi seperti: (1) menyediakan konteks yang bermakna pada situasi abstrak, (2) menyederhanakan masalah dengan membatasi kebebasan menjawab, (3) merepresentasikan perkataan mahasiswa, dan (4) membangun kembali makna. Terakhir, pada level 3 dosen dapat memberikan pembelajaran yang dapat meningkatkan kemampuan berpikir konseptual mahasiswa (*developing conceptual thinking*). Level tertinggi *scaffolding* ini meliputi interaksi dalam pembelajaran yang secara eksplisit ditujukan untuk membangun konsep dengan cara memberikan kesempatan untuk saling mengungkapkan pemahaman antara mahasiswa dan dosen. Mahasiswa dibantu untuk dapat mempertahankan kemampuan dalam mengkaitkan dan membangun representasi, menyalurkan keterampilan, dan mengkomunikasikan pemahaman.

Selanjutnya penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal cerita berdasarkan tahapan analisis kesalahan Newman serta mendeskripsikan pemberian *scaffolding* bagi mahasiswa pendidikan matematika UNISMA dalam menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim pada matakuliah kalkulus lanjut. *Scaffolding* yang diberikan merujuk pada level *scaffolding* dari Anghileri (2006).

METODE

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif karena bertujuan untuk mendeskripsikan pemberian *scaffolding* bagi mahasiswa pendidikan matematika UNISMA dalam menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim pada matakuliah kalkulus lanjut. Jenis penelitian ini dapat dikategorikan sebagai penelitian deskriptif eksploratif, yaitu mendeskripsikan hasil eksplorasi proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal cerita (Subanji, 2007). Dikatakan penelitian deskriptif eksploratif karena data yang dikumpulkan merupakan data verbal. Data verbal berupa ungkapan mahasiswa tentang proses yang dilakukan dalam mengerjakan soal cerita.

Subjek penelitian merupakan mahasiswa semester 3 Prodi Pendidikan Matematika UNISMA yang menempuh matakuliah Kalkulus Lanjut pada semester gasal 2016/2017. Pemilihan subjek penelitian menggunakan teknik *purposive sampling* karena peneliti tidak sembarang memilih mahasiswa sebagai subjek penelitian. Pertama, peneliti mengklasifikasikan kesalahan mahasiswa dari hasil tes yang telah dilakukan. Berdasarkan hasil tes yang diberikan, hanya ada 6 mahasiswa dari 114 mahasiswa yang menempuh matakuliah kalkulus lanjut, atau hanya 0.05% mahasiswa yang mampu menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim dengan benar. Tes hanya berisi 1 soal cerita harga ekstrim yaitu:

Pak Karno ingin membuat akuarium berbentuk balok (tanpa tutup) dengan alas terbuat dari batu alam dan sisi terbuat dari kaca. Harga bahan untuk alas per kaki persegi - nya, empat kali harga bahan untuk sisinya. Tentukan kapasitas muat maksimum akuarium jika jumlah uang yang tersedia untuk membeli bahan adalah Rp540.000, - dan harga bahan untuk alas Rp30.000, - per kaki persegi.

Soal tes merupakan modifikasi dari soal pada buku kuliah Kalkulus Jilid 2 (Purcell dan Rigdon, 2004), namun soal dalam buku kalkulus tersebut kurang kontekstual sehingga soal tes dibuat lebih kontekstual.

9. Bahan untuk alas suatu kotak persegipanjang harganya tiap kaki persegi, tiga kali harga bahan untuk sisi dan tutupnya. Cari kapasitas muat maksimum kotak yang demikian itu, jika jumlah uang yang tersedia untuk bahan adalah Rp. 19.200,- dan bahan untuk alas berharga Rp. 960,- tiap kaki persegi.

Gambar 1. Soal Asli dari Buku (Purcell dan Rigdon, 2004)

Dari 108 mahasiswa yang tidak menjawab benar, 42 mahasiswa tidak menjawab soal sama sekali dan hanya menuliskan soal kembali, 66 mahasiswa lainnya menjawab dengan bervariasi, ada yang hanya menuliskan diketahui dan ditanya, ada yang hanya menuliskan rumus luas permukaan balok, ada yang menjawab tetapi tidak selesai sampai menemukan jawaban akhir, ada juga yang sudah menjawab soal sampai menemukan jawaban akhir namun salah. Kemudian peneliti hanya memilih mahasiswa yang menjawab soal sampai menemukan jawaban akhir namun masih salah, yaitu ada 34 mahasiswa. Oleh karena keterbatasan peneliti dan kondisi, selanjutnya peneliti hanya memilih 3 orang subjek penelitian. Subjek penelitian dipilih berdasarkan kemampuan komunikasi mahasiswa yang baik karena data yang dibutuhkan adalah data verbal. Peneliti juga mempertimbangkan ketersediaan subjek untuk menjadi subjek penelitian. Subjek penelitian diambil dari 3 kelas berbeda dengan tujuan agar subjek penelitian dapat menjelaskan jawaban benar kepada teman sekelasnya masing-masing setelah diberikan *scaffolding*.

Instrumen penelitian yang utama adalah peneliti. Peneliti sebagai instrument utama berperan sebagai perencana, pengumpul data, penganalisis data, penafsir data, dan akhirnya menjadi pelapor hasil penelitian. Sebagai pengumpul data, peneliti melakukan

wawancara kepada mahasiswa. Wawancara kepada mahasiswa dilakukan untuk mengetahui proses berpikir mahasiswa saat menyelesaikan soal cerita materi harga ekstrim. Dalam proses wawancara, mahasiswa diminta menyampaikan apa yang dipikirkan saat memecahkan masalah secara lisan (*Think Alouds*). Menurut Charters (2003), *think alouds* merupakan salah satu cara efektif untuk mengetahui proses berpikir mahasiswa (yang melibatkan kerja memori) dan dapat digunakan untuk mengetahui perbedaan masing-masing individu dalam mengerjakan tugas yang sama. Pedoman wawancara mengadaptasi pendapat Raduan (2009) dalam mengkategorisasikan kesalahan mahasiswa berdasarkan analisis kesalahan Newman sebagai berikut.

Tabel 1. Pedoman wawancara

Indikator	Pertanyaan
<i>Reading</i>	Tolong bacakan soalnya kembali. Apa yang Anda pahami dari soal tersebut?
<i>Comprehension</i>	Menurut Anda, apa yang diketahui dan ditanyakan dari soal tersebut?
<i>Transformation</i>	Bagaimana cara Anda menyelesaikan soal tersebut? Strategi apa yang digunakan?
<i>Process Skill</i>	Ceritakan bagaimana Anda menyelesaikan soal
<i>Encoding</i>	Tuliskan jawaban Anda.

diadaptasi dari Raduan (2009)

Instrumen lain yang digunakan dalam penelitian adalah lembar soal dan alat rekam. Selanjutnya teknik analisis data dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah: (1) mentranskrip data verbal yang terkumpul, (2) menelaah seluruh data yang tersedia dari berbagai sumber, yaitu dari hasil *think alouds*, wawancara, hasil rekaman video dan rekaman suara, serta hasil pekerjaan siswa, (3) mengadakan reduksi data dengan membuat abstraksi, yaitu usaha membuat rangkuman yang inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang perlu dijaga, (4) melakukan analisis kesalahan siswa berdasarkan analisis kesalahan Newman dan menentukan scaffolding yang diberikan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Berdasarkan penelitian yang dilakukan didapatkan hasil analisis kesalahan berdasarkan analisis kesalahan Newman pada masing-masing subjek penelitian. Pada tahap *reading* subjek pertama (S1) bisa membaca soal dengan baik, tetapi S1 salah memahami makna beberapa kata pada soal. S1 menganggap bahwa "kapasitas muat" merupakan luas permukaan dan satuan "kaki persegi" diartikan bahwa kaki (alas) balok berupa persegi. Selanjutnya pada tahap *comprehension*, S1 salah dalam memahami apa yang diketahui dan ditanya dari soal. S1 menganggap bahwa luas alasnya sama dengan empat kali luas sisinya karena harga bahan alas empat kali harga bahan sisi. Akibat S1 salah memahami soal maka S1 menganggap bahwa panjang sama dengan lebar karena alasnya dianggap berbentuk persegi. S1 juga melakukan kesalahan dengan menganggap bahwa ditanyakan adalah luas permukaan. Kesalahan lain yang dilakukan S1 adalah dengan menganggap bahwa 30.000 adalah luas alas balok. Pada tahap *transformation*, karena S1 salah memahami apa yang diketahui dan ditanya dari soal, maka S1 juga salah dalam menentukan strategi matematis. S1 hanya melakukan operasi aljabar sederhana

untuk menentukan solusi, padahal sebenarnya harus dikaitkan dengan konsep harga ekstrim atau fungsi maksimum minimum. Pada tahap *process skill*, operasi matematis yang dilakukan S1 sebenarnya sudah sesuai dengan strategi yang dipilih pada tahap *transformation* dan tidak ada kesalahan. Namun, karena strategi yang dipilih salah, maka proses yang dilakukan S1 sebenarnya juga salah. Terakhir pada tahap *encoding*, S1 hanya menuliskan jawaban akhir yang masih memuat simbol tanpa diuraikan lebih lanjut makna simbol yang digunakan. Jawaban akhir S1 ini sesuai dengan proses yang dilakukan, namun sebenarnya salah karena strategi yang dipilih dalam tahap *transformation* salah.

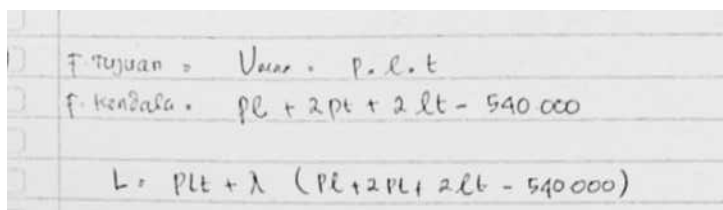
Selanjutnya subjek kedua (S2) bisa membaca soal dengan baik dan memahami makna tiap kata dengan baik pada tahap *reading*. Pada tahap *comprehension*, S2 salah memahami yang diketahui dari soal. S2 terbalik dengan menganggap harga bahan untuk sisi adalah empat kali harga bahan untuk alas. Padahal seharusnya harga bahan untuk alas adalah empat kali harga bahan untuk sisinya. S2 juga menganggap harga bahan untuk “sisi” Rp 30.000 per kaki persegi padahal pada soal tertulis harga bahan untuk “alas” yang sebesar Rp 30.000-per kaki persegi. Pada tahap *transformation*, S2 sebenarnya sudah memikirkan untuk menggunakan metode Lagrange karena soal merupakan soal ekstrim bersyarat, tetapi kalimat matematika yang ditulis masih salah. S2 bingung karena luas permukaan belum diketahui sehingga S2 menganggap bahwa 540.000 adalah luas permukaan (Gambar 2).

$$\begin{aligned}
 & \text{p. l. t. s} \\
 & L_p = p_{lt} + \lambda (2lt + 2pt + pl) = 540.000 \\
 & = p_{lt} + \lambda (2lt + 2pt + 120.000 p_l - 540.000) = 0
 \end{aligned}$$

Gambar 2. Transformation dan process skill S2

Berdasarkan wawancara, diketahui bahwa maksud S2 “Lp” adalah luas permukaan yang merupakan fungsi kendala, padahal itu sudah masuk pada fungsi Lagrange sehingga kalimat matematika S2 salah, selain itu kendala seharusnya adalah kendala harga bukan luas permukaan. Selanjutnya pada tahap *process skill* juga ada kesalahan, yaitu ketika 540.000 pindah ke ruas kiri, 540.000 masuk ke dalam kurung sehingga maknanya menjadi berbeda. Pada tahap *encoding*, satuan yang digunakan S2 masih salah. S2 juga masih menggunakan symbol yang tidak diuraikan maknanya.

Terakhir Subjek 3 (S3), pada tahap *reading* S3 bisa membaca soal dengan baik dan bisa memaknai setiap kata dalam soal dengan baik. Pada tahap *comprehension*, S3 sudah menuliskan fungsi tujuan dan fungsi kendala. Namun S3 tidak mempertimbangkan beberapa hal yang tertulis pada soal, seperti harga bahan untuk alas Rp 30.000, per kaki persegi dan harga bahan alas empat kali harga bahan sisi. Kalimat matematika yang digunakan pada fungsi kendala menjadi salah (Gambar 3). Tahap ini sudah masuk pada tahap *transformation*.



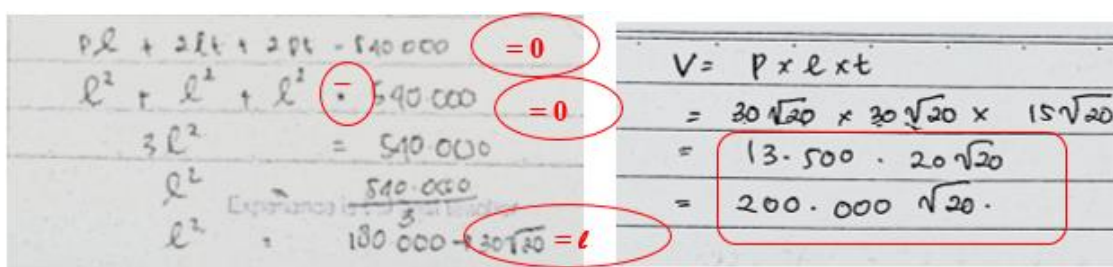
$$f \text{ Tujuan} = V_{\max} = p.l.t$$

$$f \text{ kendala} = pl + 2pt + 2lt = 540.000$$

$$L = plt + \lambda (pl + 2pt + 2lt - 540.000)$$

Gambar 3. Transformation S3

Pada tahap *transformation* terlihat fungsi kendala yang dituliskan salah karena tidak mempertimbangkan harga alas dan sisi. Namun strategi yang digunakan sudah benar yaitu metode Lagrange. Selanjutnya pada *process skill* S3 juga melakukan kesalahan proses seperti pada Gambar 4. Terakhir, tahap *encoding* S3 juga masih menggunakan symbol yang tidak dijabarkan maknanya serta masih belum menuliskan satuan.



$$pl + 2lt + 2pt = 540.000$$

$$l^2 + l^2 + l^2 = 540.000$$

$$3l^2 = 540.000$$

$$l^2 = \frac{540.000}{3}$$

$$l^2 = 180.000 \cdot \sqrt{20} = l$$

$$V = p \times l \times t$$

$$= 30\sqrt{20} \times 30\sqrt{20} \times 15\sqrt{20}$$

$$= 13.500 \cdot 20\sqrt{20}$$

$$= 200.000 \sqrt{20}$$

Gambar 4. Process Skill S3

Pembahasan

Dari hasil yang telah diuraikan, maka dapat disimpulkan berdasarkan analisis kesalahan Newman bahwa S1 melakukan kesalahan *reading*, *comprehension*, dan *encoding*. Kesalahan *reading* karena S1 bisa membaca soal dengan baik tetapi salah memahami beberapa kata pada soal sesuai dengan pendapat Suyitno dan Suyitno (2015). Meskipun proses *transformation* dan *process skill* S1 salah tetapi hanya sebagai akibat dari *comprehension* yang salah. Sedangkan S2 dan S3 melakukan kesalahan *comprehension*, *transformation*, *process skill*, dan *encoding*. Selanjutnya, *scaffolding* diberikan menurut level *scaffolding* dari Anghileri (2006). Pertama diberikan *scaffolding* level 1, berupa lingkungan belajar yang tenang dan nyaman. Dalam penelitian ini, digunakan gazebo (Gambar 5). Kemudian 3 subjek diskusi diberi kesempatan untuk berdiskusi secara kooperatif. Hal ini juga sesuai dengan konsep *social scaffolding* dari Baxter dan William (2010).



Gambar 5. Gazebo

Proses diskusi S1, S2, S3 berlangsung seru karena masing-masing memiliki jawaban yang berbeda. Kemudian peneliti mulai masuk dan memberikan *scaffolding* level 2, yaitu *explaining*, *reviewing*, dan *restructuring* pada masing-masing subjek. Pada *explaining*, peneliti menjelaskan tentang maksud soal. Pada tahap ini, peneliti menjelaskan kepada S1 bahwa “kapasitas muat” itu terkait dengan isi, yang analog dengan volume dan kaki persegi merupakan satuan luas. Pada tahap ini kesalahan S1 pada tahap *reading* bisa teratasi. Kemudian *reviewing*, pada tahap ini peneliti memberi kesempatan pada S1, S2, dan S3 untuk menjelaskan jawabannya masing-masing. Kemudian peneliti mengajukan pertanyaan dan melakukan *parallel modeling*, yaitu memberikan contoh permasalahan sejenis sehingga subjek penelitian memahami pengertian dari ekstrim bersyarat, fungsi tujuan, dan fungsi kendala. Pada tahap ini kesalahan *comprehension* S1, S2, S3 bisa teratasi. Selanjutnya *restructuring*, yaitu membangun kembali makna, tentang makna soal dan strategi matematika apa yang bisa digunakan untuk menyelesaikan soal. Strategi matematika yang digunakan juga mulai dibatasi, yaitu hanya yang terkait dengan ekstrim bersyarat. Pada tahap ini, mahasiswa juga diberi *scaffolding* level 3, yaitu *developing conceptual thinking* sehingga mahasiswa dapat menyusun kalimat matematika yang benar dan dapat melakukan pemisalan dengan jelas sehingga kesalahan *transformation* bisa teratasi. Kesalahan pada tahap *process skill*, diberikan *scaffolding* level 2, yaitu *reviewing* dimana mahasiswa diberi kesempatan untuk mengulas kembali jawabannya, dan level 3 *developing conceptual thinking* agar mahasiswa dapat memperbaiki kesalahan konsep. Terakhir tahap *encoding*, bentuk *scaffolding*-nya adalah *scaffolding* level 2 yaitu *reviewing* dengan mengulas kembali jawaban, apakah satuan sudah benar, sudah tidak memuat symbol, dan sesuai dengan yang diminta oleh soal.

Setelah diberikan *scaffolding*, peneliti meminta subjek penelitian untuk menjelaskan jawaban benar pada teman sekelasnya masing-masing. Ternyata, apa yang dijelaskan oleh masing-masing subjek penelitian ini sudah benar dan tidak ada kesalahan lagi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa pemberian *scaffolding* dapat membantu untuk memperbaiki kesalahan mahasiswa. Selain itu, *scaffolding* juga membantu mahasiswa untuk lebih memahami konsep dan prosedur matematis.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa S1 melakukan kesalahan *reading*, *comprehension*, dan *encoding*. S2 melakukan kesalahan *comprehension*, *transformation*, *process skill*, dan *encoding*. S3 juga melakukan kesalahan *comprehension*, *transformation*, *process skill*, dan *encoding*. Pertama *scaffolding* yang digunakan pada S1, S2, dan S3 adalah *scaffolding* level 1, yaitu pemberian ruang belajar yang tenang dan kondusif serta model pembelajaran kooperatif. Selanjutnya untuk memperbaiki kesalahan *reading* dilakukan *scaffolding* level 2, yaitu *explaining*. Memperbaiki kesalahan *comprehension* dengan *scaffolding* level 2, yaitu *reviewing* dan *restructuring*. Guna memperbaiki kesalahan *transformation* digunakan *scaffolding* level 2 dan level 3, yaitu *restructuring* (level 2) dan *developing conceptual thinking* (level 3). Selanjutnya untuk memperbaiki kesalahan *process skill* digunakan *scaffolding* level 2 dan

level 3, yaitu *reviewing* (level 2) dan *developing conceptual thinking* (level 3). Terakhir untuk memperbaiki kesalahan *encoding* digunakan *scaffolding* level 2, yaitu *reviewing*.

Saran

Pemberian *scaffolding* tiga level dari Anghileri (2006) terbukti mampu memperbaiki kesalahan mahasiswa. *Scaffolding* yang diberikan tidak harus berdasarkan analisis kesalahan Newman, bisa juga menggunakan analisis kesalahan yang lain. Oleh karena itu, disarankan bagi peneliti lain untuk menganalisis kesalahan dengan metode analisis yang lain. *Scaffolding* yang diberikan juga disarankan untuk dapat dikembangkan kembali bagi peneliti lain.

DAFTAR RUJUKAN

- Ahmad A., Tarmizi, R.A., Nawawi, M. 2010. Visual Representations in Mathematical Word Problem Solving Among Form Four Students in Malacca. *Procedia Social and Behavioral Science*, 8: 356-361.
- Anghileri, J. 2006. Scaffolding Practices That Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9: 33-52.
- Bates, E.T., Weist, L.R. 2004. Impact of Personalization of Mathematical Word Problems on Student Performance. *The Mathematics Educator*, 14 (2): 17-26.
- Baxter, J.A. dan William, S. 2010. Social And Analytic Scaffolding In Middle School Mathematics: Managing The Dilemma Of Telling. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13: 7-26.
- Charters, E. 2003. The Use of Think-aloud Methods in Qualitative Research An Introduction to Think-aloud Methods. *Brock Education*, 12 (2): 68-82.
- Huang, X. dan Cheng, L. 2010. Analyzing Errors Made by Eighth-Grade Students in Solving Geometrical Problems in China. *The Mathematics Educator*, 12 (2): 63-80.
- Jenkins, O.F. 2010. Developing Teachers' Knowledge Of Students As Learners Of Mathematics Through Structured Interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13: 141-154.
- Lannin, J.K., Barker, D.D., Townsend, B.E. How Students View The General Nature Of Their Errors. *Educational Studies in Mathematics*, 66: 43-59.
- Prakitipong, N. dan Nakamura, S. 2006. Analysis of Mathematics Performance of Grade Five Students in Thailand Using Newman Procedure. *Journal of International Cooperation in Education*, 9 (1): 111-122.
- Purcell, E.J., Varberg, D., Rigdon, S.E. 2004. *Kalkulus Jilid 2 (Edisi 8)*. Jakarta: Erlangga.
- Raduan, I.H. 2009. Error Analysis and the Corresponding Cognitive Activities Committed by Year Five Primary Students in Solving Mathematical Word Problems. *Procedia Social and Behavioral Science*, 2: 3836-3838.
- Suyitno, A. dan Suyitno, H. Learning Therapy For Students In Mathematics Communication Correctly Based-On Application Of Newman Procedure (A Case Of Indonesian Student). *International Journal of Education and Research*, 3(1): 529-538.
- Subanji. 2007. *Proses Berpikir Penalaran Kovariasional Pseudo Dalam Mengkonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamik Berkebalikan*. Disertasi tidak diterbitkan. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.
- Tello, E.A. 2010. Making Mathematics Word Reliable Measures of Student Mathematics Abilities. *Journal of Mathematics Education*, 3 (1): 15-26.